В. В. Картак, Б. Н. Хабибуллин[1]
(**Уфа,** *kvera@mail.ru, Khabib-Bulat@mail.ru*)

ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК

Для подпространства $X_0 \subset X$ упорядоченного векторного пространства X над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ алгебраически сопряженное к X_0 пространство обозначаем через X_0^*. Функционал $q\colon X \to [-\infty, \infty]$ *допускает двойственное представление* (сверху) на $x \in X_0$ (относительно X_0), если

$$q(x) = \inf\{S(x)\colon S \in X_0^*,\ q(x') \leqslant S(x')\ \forall\, x' \in X_0\}.$$

Пусть (X_n) — последовательность векторных решеток над $\mathbb{R}$ с отношениями порядка $\leqslant_n$ на X_n, $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$. Для вектора $x = (x_n) \in \prod_n X_n$ через $\mathrm{pr}_n x := x_n$ обозначаем проекцию x на X_n. На $\prod_n X_n$ вводится отношение порядка $\leqslant$, а именно: $x \leqslant x'$ в $\prod_n X_n$, если $\mathrm{pr}_n x \leqslant_n \mathrm{pr}_n x'$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $p_n\colon X_{n+1} \to X_n$ — положительные отображения, сохраняющие точную верхнюю грань. Подпространство X в $\prod_n X_n$, векторы которого x удовлетворяют условию $\mathrm{pr}_n x = p_n(\mathrm{pr}_{n+1} x)$, $\quad n \in \mathbb{N}$, снабженное индуцированным с $\prod_n X_n$ отношением порядка $\leqslant$, суть *проективный предел последовательности векторных решеток X_n относительно отображений p_n* (см. [1]). Для $n \in \mathbb{N}$ с функционалом $q\colon X \to [-\infty, +\infty]$ ассоциируются функционалы $q_n\colon X_n \to [-\infty, +\infty]$, $q_n(x_n) := \sup q\bigl(\mathrm{pr}_n^{-1}(x_n)\bigr)$, $x_n \in X_n$.

Основная задача. *Пусть каждый ассоциированный функционал q_n допускает двойственное представление на всех векторах из X_n, $n \in \mathbb{N}$. Для подпространства $X_0 \subset X$ и вектора $x \in X_0$ дать условия, при которых функционал q допускает двойственное представление на векторе $x \in X_0$.*

Эта задача возникла в связи с вопросами существования и построения наибольших минорант из конусов (плюри)субгармонических функций для различных функций и их многочисленными приложениями (см. [1] и сайт http://math.bsunet.ru/khb). В определенной степени она была решена в [1] для суперлинейных и специальных супремальных функционалов. Предлагаются обобщения этих результатов в нескольких направлениях: рассмотрение проективного предела по произвольному направленному вверх множеству; перенос на произвольные, в частности, и на выпуклые функционалы q; распространение двойственного представления на векторы из конуса $X_0^{\downarrow}$, состоящего из точных нижних граней направленных вниз подмножеств из $X_0 \subset X$. Это расширяет сферу приложений предложенной двойственности в теории функций (например, к распределению нулей голоморфных и представлению мероморфных функций) и в теории (плюри)потенциала.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хабибуллин Б. Н. *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций.* I, II.// Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – Т. 65. – № 4. – С. 205–224; 2001. – Т. 65. – № 5. – С. 167–190.

[1]Поддержано РФФИ, проекты №№ 09-01-00046_а и 08-01-97023-р_поволжье_а, а также программой поддержки ведущих научных школ РФ, НШ–10052.2006.1.