УДК 517.5 : 517.9 : 514.17

Распределение нулей голоморфных функций и представление мероморфных функций: метод выметания

Б. Н. Хабибуллин*

20 декабря 2008 г.

Аннотация

Разработана общая схема (метод выметания) описания нулевых множеств, а также нулевых подмножеств для весовых классов голоморфных функций, выделяемых поточечными ограничениями сверху, в областях комплексной плоскости и n-мерного комплексного пространства. Эта схема подходит и для представления мероморфных функций в виде частного голоморфных функций заданного роста, возможно, без общих нулей. Она также позволяет конструировать по возможности минимальное расширение исходного весового класса голоморфных функций, для которого каждое нулевое подмножество исходного класса становиться уже нулевым множеством в расширении.

Для конкретных весовых алгебр и пространств получены точные достаточные условия для последовательностей неединственности. Они формулируются в терминах мажорирования числа точек последовательности мерами Рисса субгармонических весов на достаточно мелких разбиениях области. Приведено описание нулевых множеств для жестких нормируемых пространств голоморфных функций в единичном круге и на комплексной плоскости. Наиболее детально исследованы в 2006-2008 гг. в этом направлении пространства и классы голоморфных функций в единичном круге не слишком быстрого роста вблизи границы, а также пространства и классы (не алгебры!) целых функций, выделяемые ограничениями на тип при конечном порядке. Установлены обобщения теорем Неванлинны о функциях ограниченной характеристики в единичном круге на функции произвольного роста. Часть из этих исследований показывает, что метод выметания

*Итоговый полнотекстовый научный отчет за 2006–2008 годы по проекту № 06-01-00067а Российского фонда фундаментальных исследований в формате PDF.

способен давать точные неулучшаемые результаты. Полученные новые теоремы единственности для целых функций позволили довольно точно оценить радиус круга полноты систем экспонент в различных классических терминах распределения показателей экспонент. Эти оценки существенно тоньше известных ранее.

Дан широкий обзор по полноте систем целых функций в классических пространствах функций вещественного или комплексного переменного на подмножествах комплексной плоскости или n-мерного комплексного пространства.

Рассмотрены новые условия близости целых (соответственно субгармонических) функций в терминах близости их распределений нулей (соответственно мер Рисса). Исследована область сходимости кратного ряда экспонент, получены аналоги теорем Абеля и Коши-Абеля для таких рядов.

English version. Khabibullin B. N. "*Distribution of zeros of holomorphic functions and the representation of meromorphic functions: method of the balayage*".
The general scheme (method of the balayage) for description of zero sets and subsets for weight spaces of holomorphic functions defined by pointwise restrictions from above, in domains of a complex plane and n-dimensional complex space is created. This scheme also suits for the representation of meromorphic functions as quotient of holomorphic functions of given growth, possibly, without common zeros. It also allows to construct whenever possible the minimal expansion of an initial weight class holomorphic functions for which each zero subset for initial class is already zero set for expansion.

For concrete weight algebras and spaces exact sufficient conditions for non-uniqueness sequences are received. They are formulated in terms of majorization of numbers of points of sequence by Riesz measures of subharmonic weights on sufficiently fine splittings of domain. We give a description of zero sets for rigid normalized spaces of holomorphic functions in the unit disk and the complex plane. Spaces and classes (not algebras!) of holomorphic functions in the unit disk not too fast growth near of boundary, and also entire functions allocated by restrictions on type at the final order are most in details investigated in 2006-2008 in this direction. We give generalizations of Nevanlinna theorems on functions of bounded characteristics for functions with arbitrary growth. The part from these researches shows, that the balayage method is capable to yield exact not improved results. The obtained new theorems of uniqueness for the entire functions have allowed to estimate precisely enough radius of a disk of completeness of exponential systems in various classical terms for distribution of exponents of exponential system. These estimations are essentially more thin known earlier.

The wide review on the completeness of systems of the entire functions in classical spaces of functions real or complex variables on subsets of a complex plane or n-dimensional complex space is given.

New conditions of closeness of the entire (subharmonic resp.) functions in terms of closeness of their zero distributions (Riesz measures resp.) are considered. The domain of convergence for multiple exponential series is described, and analogues of theorems of Abel and Cauchy-Abel for such series are obtained.

3.4. Объявленные ранее *(в исходной заявке)* цели[1] проекта на 2008 год

По исходной заявке от 2007 года в 2008 г. предусматривалось

1) реализовать разработанный в ходе выполнения проектов РФФИ метод выметания для пространств голоморфных в единичном круге функций, определяемых нерадиальными по существу мажорантами;

2) объединить полученные ранее результаты об описании множеств неединственности (подпоследовательностей нулей) для весовых пространств голоморфных в ограниченных областях функций и их устойчивости при малых шевелениях с описаниями расширений таких пространств, для которых каждая последовательность нулей является последовательностью нулей в исходном пространстве;

3) описать достаточно общие весовые классы голоморфных функций в круге и на плоскости, для которых каждая мероморфная функций, представимая в виде отношения функций из этих классов, представима в виде отношения функций без общих нулей из того же класса или минимального его расширения;

4) распространить лежащее в основе метода выметания двойственное представление суперлинейных функционалов в проективных пределах векторных решеток на вогнутые или выпуклые функционалы на них. Это позволит расширить сферу применимости метода выметания;

5) найти условия устойчивости равномерной минимальности систем экспонент при малых изменениях показателей в жестких банаховых пространствах голомрфных функций в области.

6) продолжить исследование специфических свойств кратных рядов экспонент.

3.5. Степень выполнения поставленных в проекте задач

Поставленные задачи в основной своей части выполнены полностью. Значительная доля полученных результатов опубликована или принята к печати в центральных рецензируемых отечественных или зарубежных изданиях. Кроме того, часть полученных результатов (пп. 5), 6)) находиться в завершающей стадии оформления в виде статей.

Конкретнее, по п. 1) основные результаты изложены в статье [Kh09b]. Результаты, полученные по п. 2), в виде работы из двух частей опубликованы в журнале «Алгебра и анализ» [Kh08a], [Kh08a]. Результаты по п. 3) нашли отражение в статьях [Kh09a], [Kh09b]. Часть их анонсирована в [kh08]. Распространение метода выметания по п. 4) осуществлено и находиться в стадии оформления статьи. Наконец, по пп. 5), 6) полученные результаты — на этапе совершенствования.

[1] Дословно по заявке от 2007 года.

3.6. Полученные за отчетный период *(2008 г.)* важнейшие результаты

1. В рамках метода выметания дана реализация описания множеств (не)единственности и нулевых множеств для более или менее явно заданных весовых пространств голоморфных функций в ограниченной области, в единичном круге, на комплексной плоскости в классических или близких к ним терминах плотностей распределения точек предполагаемого множеств (не)единственности или нулевых множеств (опубликованы 2 статьи в журнале «Алгебра и анализ» [Kh08a], [Kh08b]; одна статья принята к печати в журнале «Математический сборник» [Kh09a], а другая в том же журнале находится в стадии рассмотрения [Kh09b]).

2. Дана новая оценка минимально возможного типа целой функции конечного порядка, обращающейся в нуль на заданной последовательности точек комплексной плоскости, при априорно известном поведении канонического произведения Вейерштрасса-Адамара, построенного по той же последовательности точек. Последние результаты применены к оценкам радиуса круга полноты систем экспонент в терминах ее показателей (статья принята к печати в журнале «Математический сборник» [Kh09a]).

3. Получены новые результаты о возможности двойственного представления суперлинейного функционала на проективном пределе векторных решеток, лежащего в основе метода выметания. Результаты находятся в стадии оформления в виде статьи.

Здесь мы приводим только те результаты проекта, формулировки которых не требуют значительной предварительной подготовки. В формулировках результатов из конкретной статьи используются обозначения именно этой статьи.

Пусть Ω — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hol}(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций, $\mathrm{Hol}(\Omega) \supset H$ — векторное подпространство. Не более чем счетная последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, $\lambda_k \in \Omega$ без предельных точек в Ω, называется *последовательностью нулей* (соответственно *последовательностью неединственности*) для подпространства H, если найдется функция $f \in H \setminus \{0\}$, кратность обращения в нуль которой в каждой точке $\lambda \in \Omega$ совпадает с числом (соответственно не меньше числа) повторений этой точки λ в последовательности Λ. Понятие *последовательности единственности* — отрицание *последовательности неединственности.*

Для субгармонической в области Ω функции $p \not\equiv -\infty$ меру $\nu_p = \frac{1}{2\pi}\Delta p \geqslant 0$ (здесь Δ — оператор Лапласа, а равенство — в смысле теории распределений) называем *мерой Рисса* функции p в Ω.

1. Последовательности (не)единственности. Для конкретных весовых алгебр и пространств, определяемых субгармонической системой весов в ограниченной области, получены точные достаточные условия для последовательностей неединственности, формулируемые в терминах мажорирования числа точек последовательности мерами Рисса субгармонических весов на достаточно мелких разбиениях области. Эти результаты опубликованы в виде статьи из двух частей в журнале «Алгебра и анализ» [Kh08a], [Kh08b].

Каждой последовательности $\Lambda \subset \Omega$ сопоставляем считающую меру n_Λ, определенную по правилу $n_\Lambda(B) =$ *число точек из* Λ *в подмножестве* $B \subset \Omega$. Полагаем

$$H_p(\Omega) := \operatorname{Hol}(\Omega; p) := \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\Omega)\colon \sup_{z\in\Omega} \frac{|f(z)|}{\exp p(z)} < +\infty \right\}, \tag{1}$$

где p — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_p.

Далее $SH(\Omega)$ — конус всех *субгармонических* в Ω функций; $SH^+(\Omega)$ — подконус всех *положительных* функций из $SH(\Omega)$. Пусть $\mathcal{P}$ — подмножество в $SH(\Omega)$, не содержащее функцию $\equiv -\infty$, которое далее называем *системой весов на* Ω, а функции из $\mathcal{P}$ — *весовыми*, или *весами*. Если система весов $\mathcal{P}$ обладает свойством

($\mathrm{H}^\uparrow$) *для любых* $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ *найдутся функция* $p \in \mathcal{P}$ *и постоянная* C*, при которых* $\max\{p_1(z), p_2(z)\} \leqslant p(z) + C$ *для всех* $z \in \Omega$,

то класс $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega) := \bigcup_{p\in\mathcal{P}} H_p(\Omega)$ образует векторное пространство над $\mathbb{C}$. В частности, если $\mathcal{P} = \{p\}$ — одна функция, то условие ($\mathrm{H}^\uparrow$) выполнено и $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega) = H_p(\Omega)$. Если $p \in SH^+(\Omega)$, то для системы весов $\mathcal{P} = \{cp\colon c \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant c < 1\}$ выполнено условие ($\mathrm{H}^\uparrow$) и линейное пространство $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$ обозначаем как $H^1_p(\Omega)$.

Если система весов $\mathcal{P}$ обладает свойством

($\mathrm{A}^\uparrow$) *для любых* $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ *найдутся функция* $p \in \mathcal{P}$ *и постоянная* C*, при которых* $p_1(z) + p_2(z) \leqslant p(z) + C$ *для всех* $z \in \Omega$,

то класс $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$ обозначаем как $A^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$. Если вместе с ($\mathrm{A}^\uparrow$) одновременно выполнено ($\mathrm{H}^\uparrow$), то $A^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$ — алгебра. Если $p \in SH(\Omega)$ и система весов $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\{cp\colon c \in \mathbb{R},\ 0 < c < +\infty\}, \tag{2}$$

то условие ($\mathrm{A}^\uparrow$) выполнено и класс $A^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$ обозначаем как $A^\infty_p(\Omega)$. В частности, когда $\mathcal{P} \subset SH^+(\Omega)$ и выполнено условие ($\mathrm{A}^\uparrow$), то имеет место и условие ($\mathrm{H}^\uparrow$), т. е. в таком случае $A^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$ — алгебра. Если $p \in SH^+(\Omega)$ и система весов $\mathcal{P}$ имеет вид (2), то условия ($\mathrm{H}^\uparrow$) и ($\mathrm{A}^\uparrow$) выполнены и $A^\infty_p(\Omega)$ — алгебра.

В ходе выполнения проекта получены достаточные условия, при которых последовательность Λ точек из Ω является последовательностью неединственности или последовательностью нулей для весовых пространств типа $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$.

Если $f \in H(\Omega)$ и $f \not\equiv 0$, а Zero_f — последовательность нулей функции f, перенумерованная с учетом кратности, то считающая мера $n_{\operatorname{Zero}_f}$ — мера Рисса функции $\log|f| \in SH(\Omega)$.

Для подмножества $D \subset \mathbb{C}$ через $\overline{D}$, ∂D, $\operatorname{diam} D$ и $\operatorname{conv} D$ обозначаем соответственно *замыкание, границу, диаметр* и *выпуклую оболочку* множества D в $\mathbb{C}$. Если $\overline{S}$ — компакт в D в индуцированной с $\mathbb{C}$ топологии, то S *предкомпактно в* D, что обозначается как $S \Subset D$.

Для $z \in \mathbb{C}$ и $S, D \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{dist}(z, D)$ и $\operatorname{dist}(S, D)$ обозначаем евклидово расстояние соответственно от точки $z \in \mathbb{C}$ и множества S до множества D. В частности, $\operatorname{dist}(z, \partial\mathbb{C}) = +\infty$ и $\operatorname{dist}(S, \partial\mathbb{C}) = +\infty$, поскольку $\inf \varnothing = +\infty$.

Пусть семейство борелевских подмножеств $\{S_k\}$, $S_k \Subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, образует покрытие последовательности Λ. Естественно ожидать (см., к примеру, результат Ф. А. Шамояна [Sh78, Теорема 2.2]), что если для некоторой функции $p \in \mathcal{P}$ с мерой Рисса ν_p при достаточно «мелком» покрытии $\{S_k\}$ для каждого множества $S_k \Subset \Omega$ значение $n_\Lambda(S_k)$ мажорируется величиной $\nu_p(S_k)$, то Λ — (под)последовательность нулей для $H^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$. Для такого мажорирования покрытие $\{S_k\}$ должно быть согласовано как со скоростью роста весов $p \in \mathcal{P}$ вблизи границы $\partial\Omega$, так и с возможными «зазорами» между функциями из $\mathcal{P}$. Основные результаты работы представляют собой явную количественную форму этого наблюдения. Минимальные требования на зазор между функциями из системы весов $\mathcal{P}$, при которых наш метод результативен, — условие

(L) *для любого веса $p \in \mathcal{P}$ найдутся вес $p_1 \in \mathcal{P}$ и постоянная C, при которых*

$$p(z) + \log\Bigl(1 + \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}\Bigr) + \log(1 + |z|) \leqslant p_1(z) + C \quad \textit{для всех } z \in \Omega.$$

Ясно, что в левой части неравенства из условия (L) при $\Omega = \mathbb{C}$ отсутствует второе слагаемое, а для ограниченной области Ω можно отбросить $\log(1 + |z|)$. В определенном смысле наиболее «жесткий» класс функций, к которому на данном этапе применим метод выметания в терминах мажорирования на покрытии $\{S_k\}$ области Ω, — это пространство $H^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$, построенное при фиксированной функции $p \in SH(\Omega)$, $p \not\equiv -\infty$, по системе весов

$$\mathcal{P} = \Bigl\{p(z) + C_1 \log \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)} + C_2 \log(1 + |z|) \colon C_1, C_2 \geqslant 0\Bigr\}, \quad z \in \Omega,$$

и обозначаемое далее как $H_{p+\log}(\Omega)$.

Проиллюстрируем основные результаты о последовательностzх неединственности и их устойчивости в существенно *упрощенной и ослабленной форме* для *частных случаев* весовых алгебр и пространств в *ограниченной области* Ω. На функцию $p \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_p будем накладывать условия вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p\bigl(z + \varepsilon \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) e^{i\theta}\bigr)\, d\theta + a \log\Bigl(1 + \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}\Bigr) \leqslant b p(z) + C, \quad z \in \Omega. \tag{3}$$

Теорема 1 (неединственности). *Пусть $\{S_k\}$, $k = 1, 2, \dots,$ — семейство борелевских попарно непересекающихся предкомпактных подмножеств из Ω и каждый компакт в Ω пересекается лишь с конечным числом подмножеств S_k, а последовательность Λ содержится в объединении $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Тогда*

(U_1) *если $p \geqslant 0$ и для $a = 1$ существуют ε, $0 < \varepsilon < 1$, и $b, C \geqslant 0$, при которых выполнено (3), а также $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{\operatorname{diam} S_k}{\operatorname{dist}(S_k, \partial\Omega)} < 2$ и $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{n_\Lambda(S_k)}{\nu_p(S_k)} < +\infty$, то Λ — последовательность неединственности для алгебры $A_p^{\infty}(\Omega)$;*

(U$_2$) *если для $a = 1$ при любом ε, $0 < \varepsilon < 1$, существуют $b, C \geqslant 0$, при которых выполнено* (3), *а также* $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{\operatorname{diam} S_k}{\operatorname{dist}(S_k, \partial\Omega)} < 1$ *и* $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{n_\Lambda(S_k)}{\nu_p(S_k)} < +\infty$, *то Λ — подпоследовательность нулей для класса $A_p^\infty(\Omega)$;*

(U$_3$) *если $p \geqslant 0$ и для $a = 1$ при любом $b > 1$ найдутся ε, $0 < \varepsilon < 1$, и $C \geqslant 0$, при которых выполнено* (3), $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\operatorname{diam} S_k}{\operatorname{dist}(S_k, \partial\Omega)} = 0$ *и* $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{n_\Lambda(S_k)}{\nu_p(S_k)} < 1$, *то Λ — последовательность неединственности для пространства $H_p^1(\Omega)$;*

(U$_4$) *если при $b = 1$ для некоторых ε, $0 < \varepsilon < 1$, $C \geqslant 0$ и $a < 0$ выполнено* (3), *а* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{diam} S_k}{\operatorname{dist}(S_k, \partial\Omega)} \nu_p(S_k) < +\infty$ *и $n_\Lambda(S_k) \leqslant \nu_p(S_k)$ при всех достаточно больших k, то Λ — последовательность неединственности для $H_{p+\log}(\Omega)$.*

Параллельно установлены достаточные условия устойчивости последовательностей единственности для весовых пространств при вариации этих последовательностей. В теоремах устойчивости будет иметь значение подходящая нумерация последовательностей в области.

Теорема 2 (устойчивости)**.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ и $\Gamma = \{\gamma_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательности из Ω без предельных точек в Ω. Тогда*

(S$_1$) *если* $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\lambda_k - \gamma_k|}{\min\bigl\{\operatorname{dist}(\lambda_k, \partial\Omega), \operatorname{dist}(\gamma_k, \partial\Omega)\bigr\}} < 2$ *и функция p такая же, как в* (U$_1$), *то Λ и Γ могут быть последовательностями единственности для алгебры $A_p^\infty(\Omega)$ лишь одновременно;*

(S$_2$) *если* $\limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\lambda_k - \gamma_k|}{\min\bigl\{\operatorname{dist}(\lambda_k, \partial\Omega), \operatorname{dist}(\gamma_k, \partial\Omega)\bigr\}} < 1$ *и функция p такая же, как в* (U$_2$), *то Λ и Γ могут быть подпоследовательностями нулей для класса $A_p^\infty(\Omega)$ лишь одновременно;*

(S$_3$) *если* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\lambda_k - \gamma_k|}{\min\bigl\{\operatorname{dist}(\lambda_k, \partial\Omega), \operatorname{dist}(\gamma_k, \partial\Omega)\bigr\}} = 0$, *и функция p такая же, как в* (U$_3$), *то Λ и Γ могут быть последовательностями единственности для пространства $H_p^1(\Omega)$ лишь одновременно;*

(S$_4$) *если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|\lambda_k - \gamma_k|}{\min\bigl\{\operatorname{dist}(\lambda_k, \partial\Omega), \operatorname{dist}(\gamma_k, \partial\Omega)\bigr\}} < +\infty$, *и функция p такая же, как в* (U$_4$), *то Λ и Γ могут быть последовательностями единственности для пространства $H_{p+\log}(\Omega)$ лишь одновременно.*

Для областей Ω специального вида условия в теоремах неединственности и устойчивости могут быть значительно ослаблены. Так, если область Ω *выпукла*, то в посылках утверждений (U$_1$) и (S$_1$) в правой части неравенств, имеющих вид “ $\cdots < 2$”, вместо цифры 2 можно поставить символ $+\infty$.

Все отмеченные достаточные условия точны в рамках рассматриваемых терминов и применяемых характеристик. Для специальных областей (круг) и более или менее конкретных систем $\mathcal{P}$ субгармонических функций-весов, определяющих весовое пространство, полученные достаточные условия для последовательностей неединственности совпадают с необходимыми.

2. Последовательности нулей для нормируемых пространств. В терминах выметания, функций Грина и гармонических мер дано законченное описание нулевых множеств для жестких нормируемых пространств голоморфных функций в единичном круге, определяемых радиальной весовой функцией медленного роста, таких, как равномерные пространства Бергмана и др. Результаты эти опираются на общую схему из статьи [Kh07a] и статья [Kh09b], их содержащая, направлена в печать в журнал «Математический сборник». Приведем наиболее простой результат иллюстративного характера.

Через $\mathcal{U}_0^d(\mathbb{D})$ обозначим класс всех подобластей $D \Subset \mathbb{D}$, представимых в виде объединения конечного числа кругов $D(z;t)=\{w\in\mathbb{C}\colon |w-z|<t\}\Subset\mathbb{D}$, $0\in D$.

Для $D\in\mathcal{U}_0^d(\mathbb{D})$ через $g_D(\cdot,0)$ по-прежнему обозначаем *продолженную функцию Грина* для D с полюсом в $0\in D$. В частности, $g_D(\zeta,0)\equiv 0$ для всех $\zeta\in\mathbb{C}\setminus D$.

Для $M\colon[0,1)\to[0,+\infty)$ пусть M'_- — *левая производная* M. Положим

$$H(\mathbb{D};M):=\Bigl\{f\in H(\mathbb{D})\colon \sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|\exp(-M(|z|))<+\infty\Bigr\}\subset H(\mathbb{D})\,.$$

Для функции $M(t)\equiv -p\log(1-t)$, $t\in[0,1)$, с $p\in[0,+\infty)$ пространство $H(\mathbb{D};M)$ — это классическое пространство $\mathcal{A}^{-p}$ (см., например, [HKZ]).

Наша следующая теорема развивает результаты Б. Коренблюма, Е. Беллера, К. Сейпа, Д. Льюкинга и других о (под)последовательностях нулей для $\mathcal{A}^{-p}$ (см. [HKZ; Гл. 4], [Ko75], [Be77], [Se95], [Lu96]).

Теорема 3. *Пусть $M\colon[0,1)\to[0,+\infty)$ — возрастающая функция, выпуклая от* $\log$ *на $(0,1)$, непрерывная в нуле. При условии*

$$\int_r^{1-}(1-t)\,\mathrm{d}M(t)=O(1-r),\qquad r\to 1-,\tag{4}$$

a) $\Lambda=\{\lambda_k\}$, $0\notin\Lambda$, *— последовательность нулей для* $H(\mathbb{D};M)$ $\iff$

$$\sup_{D\in\mathcal{U}_0^d(\mathbb{D})}\left(\sum_k g_D(\lambda_k,0)-\int_0^{1-}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g_D(te^{\theta},0)\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\bigl(tM'_-(t)\bigr)\right)<+\infty;$$

b) $\mathbb{D}\supset\Lambda$ *— последовательность нулей для $H(\mathbb{D};M)$ тогда и только тогда, когда Λ — последовательность неединственности для $H(\mathbb{D};M)$;*

c) *мероморфная в $\mathbb{D}$ функция f/g, где $f,g\in H(\mathbb{D};M)$ и $f,g\not\equiv 0$, представляется в виде $f_0/g_0=f/g$, где по-прежнему $f_0,g_0\in H(\mathbb{D};M)$, но уже f_0 и g_0 не имеют общих нулей.*

3. Полнота систем целых функций и множества единственности. В опубликованном втором дополненном издании монографии [Kh08c] дан детальный обзор по тематике названия этого пункта, охватывающий и основанные на методе выметания описания множеств (не)единственности и их применения к полноте систем функций в пространствах голоморфных функций. В монографии отмечен и ряд новых, ранее не публиковавшихся результатов. Обзор охватывает фактически все основные результаты по рассматриваемому направлению вплоть до 2007 года включительно. Ввиду значительного объема монографии-обзора мы воздерживаемся здесь от подробного изложения ее содержания. Полный текст книги выложен на сайтах

`http://math.bsunet.ru/khb` , `http://math.bsunet.ru/khb_e` ,

`http://math.bsunet.ru/books` .

4. Целые и мероморфные функции в $\mathbb{C}$. Радиус круга полноты системы экспонент. В этом пункте приводятся сильно упрощенные версии результатов из [Kh09a].

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в $\mathbb{C}$. Через Γ обозначаем гамма-функцию Эйлера. Для простоты рассмотрим лишь случай $0 < \rho < 1$.

Теорема 4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ последовательность конечной верхней плотности $\rho < 1$. Если тип целой функции*

$$W_1(z;\Lambda) := \prod_k \Bigl(1 - \frac{z}{\lambda_k}\Bigr), \quad z \in \mathbb{C},$$

при порядке ρ равен $\sigma > 0$, тип целой функции f, $f(\Lambda) = 0$, менее, чем

$$\frac{2^\rho \sqrt{\pi}\,\Gamma\bigl(1-\rho/2\bigr)}{\Gamma\bigl(1/2-\rho/2\bigr)}\,\sigma =: \frac{1}{s(\rho)}\,\sigma,$$

то $f \equiv 0$ on $\mathbb{C}$.

Радиус полноты $R(\Lambda)$ в $\mathbb{C}$ равен

$$\sup\bigl\{r > 0 \colon \bigl\{\exp(\lambda_k z)\bigr\} \text{ полная система в } \operatorname{Hol}\bigl(D(r)\bigr)\bigr\}.$$

Теорема 4 используется для оценок $R(\Lambda)$.

Теорема 5. *Пусть $\Lambda \subset (0, +\infty)$, $\pm\Lambda := \Lambda \cup (-\Lambda)$;*

$$\Lambda(t) := \sum_{0<\lambda_k\leqslant t} 1; \quad \overline{D}_P(\Lambda) := \frac{2}{\pi} \limsup_{y\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{y}{y^2+t^2}\,\frac{\Lambda(t)}{t}\,dt$$

— верхняя плотность Пуассона последовательности Λ Тогда

$$(0{,}8472\ldots)\cdot \pi\overline{D}_P(\Lambda) = \sqrt{\pi}\bigl(\Gamma(3/4)\bigr)^2\overline{D}_P(\Lambda) \leqslant R(\pm\Lambda) \leqslant \pi\overline{D}_P(\Lambda).$$

Теорема 6. *Пусть $f = g/q$ — мероморфная функция в $\mathbb{C}$, а g и q — целые функции типа меньше, чем $\sigma > 0$ при порядке ρ. Тогда существуют целые функции g_0, q_0 типа меньше, чем $s(\rho)\sigma$ при порядке ρ, без общих нулей, дающих представление $f = g_0/q_0$.*

3.7. Степень новизны полученных в 2008 г. результатов

Все описанные важнейшие результаты, полученные в 2008 году, являются новыми и пересечение их с ранее известными фактами носят в значительной степени строго включающий характер. Ранее не существовало столь общего результата, да и метода, позволяющего решать сразу несколько задач: при каких условиях заданная последовательность точек в произвольной области является (под)последовательностью нулей для некоторой ненулевой функции из заданного весового пространства, определяемого через достаточно произвольные весовые субгармонические функции? когда подпоследовательность нулей для весового пространства будет последовательностью нулей либо для него же, либо для некоторого его минимального расширения? при каких условиях мероморфная функция может быть представлена в виде отношения двух голоморфных функций (возможно, с требованием "без общих нулей") из определенного весового класса? Так, например, законченное описание нулевых множеств для жестких нормируемых пространств голоморфных функций в единичном круге, определяемых радиальной весовой функцией были ранее известны только в случае постоянной весовой функции (теоремы Неванлинны) или очень медленного логарифмического роста вблизи границы круга (К. Сейп, 1995 г. [Se95], [HKZ]). Использованное в исследовании последовательностей неединственности для весовых алгебр голоморфных функций новое геометрическое понятие энтропии линейной связности представляется перспективным и в других вопросах, связанных с геометрией области. Наши оценки радиуса круга полноты системы экспонент в терминах плотности Пуассона дают наилучший на нынешнем этапе результат по сравнению с известными ранее. Таким образом, отдельные вопросы, решение которых намечалось, разработаны в существенно более общей ситуации, чем намечалось. Основные используемые методы либо являются принципиально новыми, либо представляют собой далеко идущее развитие ранее известных.

3.8. Сопоставление полученных в 2008 г. результатов с мировым уровнем

Истоки проблематики описания и исследования нулевых (под)множеств голоморфных функций из определенных весовых классов голоморфных функций - в основной теореме алгебры о числе корней многочлена заданной степени, в классическом результате Р.Неванлинны, полностью описывающем последовательности нулей голоморфных в единичном круге функций ограниченной характеристики, в законченном описании нулевых множеств и множеств (не)единственности для пространства целых функций одной переменной конечного типа при заданном порядке, восходящем к Ж. Адамару и Е. Линделефу. Параллели между описаниями множеств (не)единственности и нулевых множеств и представлением мероморфной функции в области в виде отношения голоморфных функций с заданными ограничениями на их рост вблизи границы области впервые были обозначены в классическом результате Р.Неванлинны о представлении мероморфной в единичном круге функции ограниченной характеристики в виде отношения ограниченных голоморфных функций без общих нулей. Одно из наиболее интенсивно развивающихся направлений по отмеченной тематике в последние десятилетия - это описания нулевых множеств в весовых пространствах голоморфных функций в единичном круге в работах Ф. А. Шамояна [Sh78], [Sh83], берущих начало в исследованиях М. М. Джрбашяна (см. [DS88]), американских и израильских математиков в 1970-2000-ые годы (Е. Беллер, Ч. Горовиц, Б. Коренблюм, Д. Люкинг и др.), К. Сейпа и Ю.Любарского (Норвегия, 1990-2000-ые годы), Х. Хеденмальма (Швеция, 2000-ые годы), Х. Бруны, Х. Массанеды, Х. Ортеги-Черды (Испания, 2000-ые годы), О. Бласко, А. Кукурика, М. Новак (Франция) и др. (см. [HKZ], [Sh85], [Al85], [He98], [Co85], [Ho95], [Be77], [BH94], [Se95], [BM95], [Lu96]). По задаче представления мероморфных функций (как правило, на всей комплексной плоскости) наиболее интенсивные исследования в последние годы ведутся украинской математической школой (прежде всего А. А. Кондратюком и его ученики [KV01]), с переходом на конечносвязные области типа кольца, плоскости с несколькими выколотыми точками и т.п. - подробнее в совместной монографии А.А. Кондратюка и Илпо Лайне (Финляндия) 2006 года [KL06]. Исследования по возможности двойственного представления специальных супремальных функционалов, составляющего основу метода выметания в наших исследованиях, в связи с внутренними вопросами терии (плюри)потенциала и ее приложениями проводились в 1990-2000-ые годы Ш. Бу и В. Шахермайером (Китай, Австрия), Б. Коулом и Т. Рансфордом (США, Канада), Е. А. Полецким (США), Ф. Ларуссоном и Р. Сигурдсоном (Канада, Исландия) (см. [Ra01], [CR01], [BSc92], [Po93], [Po97], [Po99], [LS98]). Оценки радиуса круга полноты системы экспонент берут начало в работах Л. Шварца [Sch43], Н. Левинсона, Р. Редхеффера [Re74], Б. Я. Левина, А. Ф. Леонтьева и др. Наиболее точные результаты в этом направлении были получены в 1960-е годы Л. А. Рубелом и П. Мальявеном [MR61], которые и обратили внимание на проблему оценки радиуса круга полноты как на отдельную исключительно трудную задачу. Законченного удовлетворительного решения она не имеет и по сей день, но полученные нами и принятые к печати в 2008 г. в журнале «Математический сборник» результаты, содержащие оценки в традиционных терминах, пока наилучшие. Таким образом, проведенные по проекту в 2008 году исследования находится в русле современных. В то же время предложенный подход к задачам, заключающийся в планомерном применении абстрактного и классического выметания, является оригинальным и принципиально новым, а полученные по проекту в 2008 году результаты позволяют вскрыть новые факты в случаях, недоступных ранее использовавшимся методам, к каковым относятся, например, ситуации для весовых пространств с достаточно произвольными системами субгармонических весов на широком классе областей. Это позволяет утверждать, что теоретический уровень установленных в 2008 году результатов и применявшихся методов вполне сопоставим с мировым.

3.9. Методы и подходы, использованные в ходе выполнения проекта в 2008 г.

Решение задач об описании множеств (не)единственности и нулевых множеств для весовых пространств голоморфных функций, равно как и задача о представлении мероморфной функции в виде отношения голоморфных функций (возможно, без общих нулей) вкладываются в одну единую проблему: при каких условиях для заданной (плюри)субгармонической в области функции найдется голоморфная в этой области функция (с нулями или без них), которая гасит рост (плюри)субгармонической функции в том смысле, что сумма этой (плюри)субгармонической функции с логарифмом модуля искомой голоморфной функции имеет минимально возможный рост вблизи границы области? Для решения этой единой проблемы мы используем метод выметания, предложенный руководителем проекта ранее и развиваемый участниками проекта в последние годы. Принципиальное его отличие от ранее применявшихся подходов в том, что он имеет неконструктивный характер и не требует построения в той или иной форме (в виде бесконечных произведений, интегральных представлений, решения специальных дифференциальных уравнений и т. п.) требуемой "гасящей" голоморфной функции, а сводит все к проверке некоторой, вообще говоря, бесконечной системы неравенств, в которых участвует действия специальной системы линейных положительных функционалов (чаще всего специальных мер) на (плюри)субгармоническую функцию. Эта первая двойственность при переформулировке рассматриваемых задач. Работает здесь и вторая двойственность - переход от специальных мер к их логарифмическим потенциалам, что в явном виде уже выводит к сравнению распределения последовательности (множества в многомерном варианте) нулей голоморфных функций, претендующей на роль множества нулей для заданного весового пространства с распределением масс Рисса субгармонических весовых функций, определяющих пространство. Одно из преимуществ этого метода в том, что даже в наиболее исследованных ситуациях весовых пространств целых или голоморфных в единичном круге функций он позволяет получать вполне обозримые результаты и для пространств, определяемых нерадиальными по существу весами без жестких ограничений на них снизу, что предшествующим методам недоступно. При этом как сам метод, так и привлечение в основу метода теории упорядоченных векторных пространств являются оригинальными и ранее не встречались. Применительно к описанию именно нулевых множеств в конкретных пространствах целых функций и функций, голоморфных в единичном круге, метод выметания в явном виде и с конкретными результатами в 2008 году был реализован в печати впервые. В техническом плане реализация метода выметания потребовала достаточно глубокого исследования специальных мер Йенсена и Аренса-Зингера (обобщений гармонической меры), а также их логарифмических потенциалов (обобщений функций Грина). Для получения новых результатов по распределению нулей в весовых пространствах голоморфных функций в произвольных областях на плоскости пришлось ввести новое геометрическое понятие энтропии линейной связности и подробно исследовать его свойства.

I. Монографии и статьи по проекту № 06-01-00067а — 2006–2008 гг.

[Kh06a] *Хабибуллин Б. Н.,* Полнота систем экспонент и множества неединственности. Т. 14. Обзор-монография. Уфа. РИЦ БашГУ. 2006 г. ISBN 5-7477-1405-8; (xvi+172) стр.; 2 рис.; библиогр.: 404 назв.

[Kh06b] *Хабибуллин Б. Н.,* Нулевые подмножества, представление мероморфных функций и характеристики Неванлинны в круге // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 2. С. 117–136.

[Kh06c] *Хабибуллин Б. Н.,* Теоремы единственности для голоморфных функций и выметание // В сб.: «Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование». ИПМИ ВНЦ РАН, РГУ, ЮРГУЭС. Владикавказ. Изд-во ВНЦ РАН. 2006. С. 118–132.

[Kr06] *Кривошеева О. А.,* Теоремы Абеля и Коши-Адамара для рядов экспонент // Современные информационные и компьютерные технологии в инженерно-научных исследованиях. Научно-исследовательская стажировка молодых ученых. Сборник материалов. Том I. Математика. Научные статьи. Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. С. 136–153.

[Ku06] *Кудашева Е. Г.,* О близости целых функций с быстро сближающимися нулями // VI Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии: Сборник трудов. Том II. Математика. Уфа: 2006. С. 57–64.

[Kh07a] *Хабибуллин Б. Н.,* Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Математический сборник. 2007. Т. 198:2. С. 121–160.

[Ch07] *Чередникова Л. Ю.,* Устойчивость последовательностей единственности для классов голоморфных функций в круге с радиальной системой весов // Межвузовский сборник научных трудов «Актуальные проблемы математики и методики преподавания математики». Пенза. ПенГТА. 2007. С. 29–31.

[Ku07] *Кудашева Е. Г.,* Асимптотическая близость субгармонических и целых функций // Межвузовский сборник научных трудов «Актуальные проблемы математики и методики преподавания математики». Пенза. ПенГТА. 2007. С. 18–21.

[Kr07a] *Кривошеева О. А.,* Ряды экспоненциальных мономов в комплексных областях // Вестник УГАТУ. Математика. 2007. Том 9, № 3(21). С. 96–1103.

[Kr07b] *Кривошеева О. А.,* О замкнутости множества сумм экспоненциальных мономов // Труды XLV международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Новосибирск. НГУ. 2007. С. 43–52.

[KKh07] *Kudasheva E. G., Khabibullin B. N.,* Variation of subharmonic function under transformation its Riesz measure // Журнал математической физики, анализа, геометрии. Украина. 2007. Т. 3. № 1. С. 61-94.

[MYa07] *Мингалеева З. Т., Ялаев И. Р.,* Вычисление одного интеграла // Всероссийская школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (30 октября – 3 ноября 2007 г.). Математика. Том 2. С. 200–211.

[Kh08a] *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.,* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I // Алгебра и анализ. 2008. Том 20. № 1. С. 162-204.

[Kh08b] *Хабибуллин Б. Н.,Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.,* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II // Алгебра и анализ. 2008. Том 20. № 1. С. 205-250.

[Kh08c] *Хабибуллин Б. Н.,* Полнота систем экспонент и множества единственности. Обзор-монография (издание второе, дополненное). Уфа. РИЦ БашГУ. 2008 г. ISBN 978-5-7477-1876-8. (xvi+172) стр.; 2 рис.; библиогр.: 407 назв.

[Kh09a] *Хабибуллин Б. Н.,* Последовательности нулей голоморфных функций и представление мероморфных функций. II. Целые функции // Математический сборник (принято к печати в ноябре 2008 г. на 2009 г.).

[Kh09b] *Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н.,* Распределение нулей голомофных функций умеренного роста в единичном круге и представление мероморфных функций в нем // Математический сборник (направлена в печать в 2008 г.).

II. Материалы конференций и тезисы докладов по проекту № 06-01-00067а — 2006–2008 гг.

[khk06] *Khabibullin B. N., Kudasheva E. G.,* Variations of entire (subharmonic) function under perturbations of its zero set (Riesz measure) // Abstracts of International Conference dedicated to the centennial of B.Ya. Levin «Entire and subharmonic functions and related topics». 2006 (August 14–18). P. 20–21.

[kkh06] *Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н.,* О близости целых функций с близкими последовательностями нулями // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова, Абрау-Дюрсо, база отдыха Ростовского госуниверситета "Лиманчик", 5–11 сентября 2006 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2006. С.139–140.

[ch06] *Чередникова Л. Ю.,* Энтропия линейной связности и системы положительных субгармонических функций // IV Всесибирский конгресс женщин-математиков. Тезисы докладов. Красноярск. 15-18 января 2006 г. СибГТУ. 2006. С. 202–203.

[kr06a] *Кривошеева О. А.,* Область сходимости рядов экспонент // VI региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии. Тезисы докладов. Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. С. 7.

[kr06b] *Кривошеева О. А.,* Радиусы сходимости для рядов экспонент // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т.34. Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения — 2006». Материалы Пятой молодежной научной школы конференции. Казань: Издательство Казанского математического общества, 2006. С. 131–132.

[kr06c] *Кривошеева О. А.,* Сходимость рядов экспонент // Материалы XLIV международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. НГУ. Новосибирск, 2006. С. 18.

[kh07a] *Хабибуллин Б. Н.* О типе целых функций по ее нулям // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы", Воронеж. 2007 (27 января – 2 февраля). С. 234–235.

[kh07b] *Хабибуллин Б. Н.* Метод выметания: распределение нулей голоморфных функций и представление мероморфных функций // Уфимская международная математическая конференция, посвященная памяти А.Ф. Леонтьева (27.03.1917 – 14.04.1987). Сборник материалов. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2007. Том 3. С. 15.

[kh07c] *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей для весовых пространств голоморфных функций // Восьмая Казанская летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". КГУ, НИИММ. 2007 (27 июня – 4 июля). С. 126-127.

[kh07d] *Khabibullin B. N.* Zero (sub)sets of holomorphic functions and completeness of exponential systems // Abstracts of Fourth International Conference of Applied Mathematics and Computing (Plovdiv, Bulgaria, August 12 - 18, 2007). Vol. 2 (F-K). P. 272.

[ku07a] *Кудашева Е. Г.,* О близости субгармонических функций // Уфимская международная математическая конференция, посвященная памяти А.Ф. Леонтьева (27.03.1917 – 14.04.1987). Сборник материалов. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2007. Том 2. С. 26-27.

[ch07a] *Чередникова Л. Ю.,* Устойчивость последовательностей единственности для весовых пространств голоморфных функций в круге // Уфимская

международная математическая конференция, посвященная памяти А.Ф. Леонтьева (27.03.1917 – 14.04.1987). Сборник материалов. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2007. Том 3. С. 21-22.

[ku07b] *Кудашева Е. Г.,* (Под)последовательности нулей для пространств голоморфных функций в круге // Всероссийская школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". (30 октября - 3 ноября 2007 года). Тезисы докладов. Математика. Уфа. БашГУ. 2007. С. 5.

[ch07b] *Чередникова Л. Ю.,* Энтропия линейной связности и сегментальная оболочка подмножества // Всероссийская школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". (30 октября - 3 ноября 2007 года). Тезисы докладов. Математика. Уфа. БашГУ. 2007. С. 10.

[bkh08] *Байгускаров Т. Ю., Хабибуллин Б. Н.,* Сфера Римана и сферическое расстояние // VIII Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии. Тезисы докладов. Уфа. РИЦ БашГУ. 2008. С. 182.

[kh08] *Khabibullin B. N.,* On the representation of meromorphic functions as a ratio of holomorphic functions without common zeros // Abstracts. International conference "Analysis and topology". Lviv, Ukraine. May 26-June 7, 2008. P. 58.

III. Дополнительная библиография

[Sh78] *Шамоян Ф. А.,* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1978. Т. XIII. № 5–6. С. 405–422.

[HKZ] *H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu,* Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics. 199. New York: Springer-Verlag. 2000.

[Sh85] *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники, серия матем. анализ. 1985. Т. 23. С. 3–124.

[Al85] *Александров А. Б.* Теория функций в шаре // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985. Т. 8. С. 115–190.

[He98] *Hedenmalm H.* Recent Progress in the Function Theory of the Bergman Space // Holomorphic Spaces. MSRI Publ. Cambridge. 1998. V. 33. P. 35–50.

[Co85] *Colwell P.* Blaschke Product. Bounded Analytic Functions // Ann Arbor. The University of Michigan Press. 1985.

[DS88] *Djrbashian A., Shamoyan F. A.* Topics in the theory of A^p_α spaces. Leipzig: Teubner-Texte, 1988.

[Sh83] *Шамоян Ф. А.* О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1983. Т. XVIII. № 1. С. 15–27.

[Ho95] *Horowitz C.* Zero sets and radial zero sets in function spaces // J. Analyse Math. 1995. V. 65. P. 145–159.

[Ko75] *Korenblum B.* An extension of the Nevanlinna theory // Acta Math. 1975. V. 135. P. 187–219.

[Be77] *Beller E.* Factorization for non-Nevanlinna classes of analytic functions // Israel J. Math. 1977. V. 27. No. 3–4. P. 320–330.

[BH94] *Beller E., Horowitz C.* Zero sets and random zero sets in certain function spaces // J. Analyse Math. 1994. V. 64. P. 203–217.

[Se95] *Seip K.* On Korenblum's density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$ // J. Analyse Math. 1995. V. 67. P. 307–322.

[BM95] *Bruna J., Massaneda X.* Zero sets of holomorphic functions in the unit ball with slow growth // J. Analyse Math. 1995. V. 66. P. 217–252.

[Lu96] *Luecking D.* Zero sequences for Bergman spaces // Complex Variables. 1996. V. 30. P. 345–362.

[Ra01] *Ransford T. J.* Jensen measures // Approximation, Complex Analysis and Potential Theory (Montreál, Qc, 2000). NATO Sci. Sér. II. Math-Phys-Chem 37. Dordrecht: Kluwer, 2001. P. 221–237.

[CR01] *Cole B. J., Ransford T. J.* Jensen measures and harmonic measures // J. reine und angew. Math. 2001. V. 541. P. 29–53.

[KV01] *Kondratyuk A. A., Vasyl'kiv Ya. V.,* Growth Majorants and Quotient Representations of Meromorphic Functions // Computational Metods and Function Theory. 2001. V. 1. No. 2, P. 595–606.

[KL06] *A. Kondratyuk, I. Laine,* Meromorphic functions in multiply connected domains. Joensuu–L'viv. 2006. 115 P.

[BSc92] *Bu S., Schachermayer W.* Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331. No. 2. P.585–608.

[Po93] *Poletsky E. A.,* Holomorphic Currents // Indiana U. Math. J. 1993. V. 42. No. 1. P. 85–144.

[Po97] *Poletsky E. A.,* Disk envelopes of functions I // In the book: Complex Analysis in Contemporary Mathematics, dedicated to B. V. Shabat. ed. E. M. Chirka. Moscow: Fasis, 1997.

[Po99] *Poletsky E. A.,* Disk envelopes of functions II // J. Funct. Anal. 1999. V. 163. P. 111–132.

[LS98] *Larusson F., Sigurdsson R.,* Plurisubharmonic functions and analytic discs on manifolds // J. reine angew. Math. 1998. V. 501. P. 1–39.

[Sch43] *Schwartz L.* Etude des sommes d'exponentielles // Actualités. scient. et industr. No. 959. Paris: Hermann, 1943 (2e ed. 1959).

[Re74] *Redheffer R. M.* Completeness of sets of complex exponentials // Adv. in Math. 1977. V. 24. P. 1–62.

[MR61] *P. Malliavin, L. A. Rubel,* On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89. P. 175–206.

Подпись
руководителя проекта