УДК 517.5 : 517.9 : 512.5 : 514.17

Множества единственности и полнота систем целых функций для классов голоморфных функций

Б. Н. Хабибуллин*

5 января 2006 г.

Аннотация

Получены новые достаточные условия для множеств неединственности и нулевых множеств в весовых алгебрах и пространствах голоморфных в ограниченной области функций. Установлены условия сохранения индикатора целой функции экспоненциального типа при варьировании последовательности нулей этой целой функции. Получены новые условия устойчивости полноты системы экспонент в пространствах голоморфных в области функций. Эти условия формулируются в терминах сдвигов показателей экспоненциальных систем. Написан обстоятельный обзор по полноте систем экспонент и систем целых функций в функционалных пространствах. Установлены новые и весьма общие условия, при которых замкнутые идеалы и подмодули в пространствах голоморфных функций являются конечнопорожденными. Даны новые условия близости спектров инвариантных (относительно дифференцирования) подпространств в пространствах голоморфных функций, при которых их пересечение допускает (или не допускает) спектральный синтез.

English version. Khabibullin B. N. “*Uniqueness sets and completeness of systems of entire functions for classes of holomorphic functions*”.
New sufficient conditions for uniqueness sets and for zero set in weighted spaces of holomorphic functions on bounded domain are obtained. Conditions of invariance of indicator of entire function of exponential type are isteblished under a variation of zero set of this entire function. New conditions of stability of completeness of exponential system are obtained for spaces of holomorphic functions on a domain. These conditions are formulated in terms of shifts of exponents of exponential systems. A exhaustive survey on the completeness of exponential systems and systems of entire functions is written. New and highly common conditions are established, under which closed ideals and submodules in weighted spaces of holomorphic functions are finitely generated. New conditions for a closeness of spectra of invariant (with respect to differentiation) subspaces are given, under which the intersection of this spaces admits (or does not admits) the spectral synthesis.

*Итоговый полнотекстовый научный отчет за 2003–2005 годы по проекту № 03-01-00033а Российского фонда фундаментальных исследований в формате PDF.

3.4. Объявленные ранее *(в исходной заявке)* цели[1] проекта на 2003–2005 годы

По исходной заявке от 2002 года в 2003–2005 гг. предусматривались

1/03) разработка общего метода решения задач описания нулевых множеств и множеств (не-)единственности для весовых пространств голоморфных функций одной и многих комплексных переменных;

2/03) применение этого метода к различным конкретным весовым пространствам с явно заданными системами весов, определяющих пространство;

3/03) использование разработанного метода к задаче о представлении мероморфной функции с заданными ограничениями на рост той или иной ее характеристики как частного голоморфных функций, рост которых в определенной степени мажорируется характеристикой мероморфной функции;

4/03) получение новых доказательств классических и известных результатов в рамках рассматриваемой тематики и предлагаемого метода;

5/03) применение предполагаемых результатов к вопросам полноты и минимальности систем целых функций в пространствах голоморфных функций и к задачам аналитического продолжения.

Цели на 2004 год состояли в следующем.

1/04) Продолжить исследование множеств (не-)единственности для весовых пространств голоморфных функций, выделяемых ограничениями на их рост вблизи границы области определения, для чего предполагается использовать методы, основанные на двойственном представлении суперлинейных функционалов на проективных пределах векторных решеток и на технике выметания;

2/04) исследовать условия устойчивости множеств (не-)единственности при их достаточно малых "шевелениях"для весовых пространств голоморфных функций и, как следствие, получить условия устойчивости полноты систем экспонент в пространствах голоморфных функций;

3/04) исследования множеств (не-)единственности в пространствах целых функций, выделяемых ограничениями на их индикатор при заданном конечном порядке;

4/04) применить полученные результаты к задаче спектрального синтеза для систем уравнений свертки, к проблеме локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций;

5/04) получить новые аппроксимационные теоремы для целых функций;

6/04) сформировать первоначальный вариант детального научного обзора по полноте систем экспонент.

[1] Дословно по заявке 2002 года и отчетам за 2003–2004 гг.

Цели, выдвигавшиеся на 2005 год:

1/05) продолжить исследование множеств (не-)единственности для весовых пространств голоморфных функций, выделяемых ограничениями на их рост вблизи границы области определения, для чего предполагается использовать методы, основанные на двойственном представлении суперлинейных функционалов на проективных пределах векторных решеток и на технике выметания;

2/05) развить эти исследования применительно к описанию нулевых множеств для таких же весовых пространств голоморфных функций;

3/05) получить условия устойчивости индикатора роста целой функции конечного порядка при достаточно малых сдвигах нулей этой функции, а затем, как следствие, получить условия устойчивости полноты систем функций Миттаг-Леффлера и более общих систем целых функций в классических пространствах голоморфных функций в области;

4/05) применить полученные результаты к задаче спектрального синтеза для систем уравнений свертки, к проблеме локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций;

5/05) распространить на вогнутые функционалы теоремы о двойственном представлении суперлинейных функционалов на проективных пределах векторных решеток;

6/05) для произвольной мероморфной функции в круге дать минимально возможные оценки сверху пары голоморфных функций, отношением которых представляется эта мероморфная функция;

7/05) завершить детальный обзор по полноте систем экспонент в классических пространствах голоморфных функций и по множествам неединственности в весовых классах целых функций.

3.5. Степень выполнения поставленных в проекте задач

Поставленные задачи в основном выполнены полностью, а подавляющая часть полученных результатов опубликована в центральных изданиях или принята к печати. Конкретнее, по пп. 1/03, 2/03, 1/04, 1/05, 2/05 основные результаты анонсированы в [khc03], [khc04], [2kh04], [kh04a], [kh04c], [kh04e], [kh05b] и опубликованы в работах [Kh03a], [Kh04c], [Kh04e], [Kh04f], [Kh04g], [Ch05a], [Kh05c], [Kh05d], [Kh05e]. При этом отдельные абстрактные аспекты общей схемы описания множеств (не-)единственности и нулевых множеств, охватывающие и цели п. 5/05, развивались в [Kh03b], [Ch03a], [Kh05c], [Lu05a], [kh04b], [khf04], [lu05a], [ch06a]. Задачам представления мероморфных функций из пп. 3/03, 6/05 полностью или частично посвящены статьи [Kh03a], [Kh05d] и тезисы докладов [kh03c], [kh04c], [kh05d].

Вопросы полноты систем экспонент и систем целых функций и их устойчивости при вариации показателей, а также связанные с этим задачи устойчивости множеств единственности и аппроксимационные теоремы в пространствах целых функций, соответствующие целям пп. `5/03, 2/04, 3/04, 5/04, 3/05`, нашли отражение в [Kh04a], [Kh04c], [Kh04e], [Kh05e], [Kh06a], [kh03a], [kh03b], [kh05a]. Более того, по полноте систем экспонент или целых функций написана и сдана в печать монография-обзор [Kh06a], что завершает реализацию целей, намеченных в пп. `4/03, 6/04, 7/05`.

Те проблемы спектрального синтеза в пространстве голоморфных в выпуклой области и двойственные им гораздо более общие задачи локального описания замкнутых идеалов и подмодулей в пространствах голоморфных функций, которые являлись содержанием целей из пп. `4/04, 4/05`, практически полностью решены в [Kh04b], [Kh04d], [Kh05a], [Kh05b], [kh03b], [kh05c].

3.6. Полученные за отчетный период *(2003–2005 гг.)* важнейшие результаты

Здесь мы приводим только те результаты проекты, формулировки которых не требуют значительной предварительной подготовки.

1. Последовательности (не)единственности. Пусть Ω — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций, $H(\Omega)\supset H$ — векторное подпространство. Не более чем счетная последовательность $\Lambda=\{\lambda_k\}$, $k=1,2,\dots$, $\lambda_k\in\Omega$ без предельных точек в Ω, называется *последовательностью нулей* (соответственно *последовательностью неединственности*) для подпространства H, если найдется функция $f\in H\setminus\{0\}$, кратность обращения в нуль которой в каждой точке $\lambda\in\Omega$ совпадает с числом (соответственно не меньше числа) повторений этой точки λ в последовательности Λ.

Каждой последовательности $\Lambda\subset\Omega$ сопоставляем считающую меру n_Λ, определенную по правилу $n_\Lambda(B)=$ число точек из Λ в подмножестве $B\subset\Omega$.

Далее $SH(\Omega)$ — конус всех *субгармонических* в Ω функций; $SH^+(\Omega)$ — подконус всех *положительных* функций из $SH(\Omega)$. Пусть $\mathcal{P}$ — подмножество в $SH(\Omega)$, не содержащее функцию $\equiv-\infty$, которое далее называем *системой весов на* Ω, а функции из $\mathcal{P}$ — *весовыми*, или *весами*. Если система весов $\mathcal{P}$ обладает свойством

($\mathrm{H}^\uparrow$) *для любых $p_1,p_2\in\mathcal{P}$ найдутся функция $p\in\mathcal{P}$ и постоянная C, при которых* $\max\{p_1(z),p_2(z)\}\leqslant p(z)+C$ *для всех* $z\in\Omega$,

то класс $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega):=\bigcup_{p\in\mathcal{P}}H_p(\Omega)$ образует векторное ространство над $\mathbb{C}$. В частности, если $\mathcal{P}=\{p\}$ — одна функция, то условие ($\mathrm{H}^\uparrow$) выполнено и $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)=H_p(\Omega)$. Если $p\in SH^+(\Omega)$, то для системы весов $\mathcal{P}=\{cp\colon c\in\mathbb{R},\ 0\leqslant c<1\}$ выполнено условие ($\mathrm{H}^\uparrow$) и линейное пространство $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$ обозначаем как $H^1_p(\Omega)$.

Если система весов $\mathcal{P}$ обладает свойством

($\mathrm{A}^\uparrow$) *для любых $p_1,p_2\in\mathcal{P}$ найдутся функция $p\in\mathcal{P}$ и постоянная C, при которых* $p_1(z)+p_2(z)\leqslant p(z)+C$ *для всех* $z\in\Omega$,

то класс $H^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$ обозначаем как $A^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$. Если вместе с ($\mathrm{A}^\uparrow$) одновременно выполнено ($\mathrm{H}^\uparrow$), то $A^\uparrow_{\mathcal{P}}(\Omega)$ — алгебра. Если $p\in SH(\Omega)$ и система весов $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\{cp\colon c\in\mathbb{R},\ 0<c<+\infty\},\tag{1}$$

то условие ($\mathrm{A}^{\uparrow}$) выполнено и класс $A^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$ обозначаем как $A^{\infty}_{p}(\Omega)$. В частности, когда $\mathcal{P} \subset SH^{+}(\Omega)$ и выполнено условие ($\mathrm{A}^{\uparrow}$), то имеет место и условие ($\mathrm{H}^{\uparrow}$), т. е. в таком случае $A^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$ — алгебра. Если $p \in SH^{+}(\Omega)$ и система весов $\mathcal{P}$ имеет вид (1), то условия ($\mathrm{H}^{\uparrow}$) и ($\mathrm{A}^{\uparrow}$) выполнены и $A^{\infty}_{p}(\Omega)$ — алгебра.

В ходе выполнения проекта получены достаточные условия, при которых последовательность Λ точек из Ω является последовательностью неединственности или последовательностью нулей для весовых пространств типа $H^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$.

Для субгармонической в области Ω функции $p \not\equiv -\infty$ меру $\nu_p = \frac{1}{2\pi}\Delta p \geqslant 0$ (здесь Δ — оператор Лапласа, а равенство — в смысле теории распределений) называем *мерой Рисса* функции p в Ω. В частности, если $f \in H(\Omega)$ и $f \not\equiv 0$, а Zero_f — последовательность нулей функции f, перенумерованная с учетом кратности, то считающая мера n_{Zero_f} — мера Рисса функции $\log|f| \in SH(\Omega)$.

Для подмножества $D \subset \mathbb{C}$ через $\overline{D}$, ∂D, $\operatorname{diam} D$ и $\operatorname{conv} D$ обозначаем соответственно *замыкание, границу, диаметр* и *выпуклую оболочку* множества D в $\mathbb{C}$. Если $\overline{S}$ — компакт в D в индуцированной с $\mathbb{C}$ топологии, то S *предкомпактно в* D, что обозначается как $S \Subset D$.

Для $z \in \mathbb{C}$ и $S, D \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{dist}(z, D)$ и $\operatorname{dist}(S, D)$ обозначаем евклидово расстояние соответственно от точки $z \in \mathbb{C}$ и множества S до множества D. В частности, $\operatorname{dist}(z, \partial\mathbb{C}) = +\infty$ и $\operatorname{dist}(S, \partial\mathbb{C}) = +\infty$, поскольку $\inf \varnothing = +\infty$.

Пусть семейство борелевских подмножеств $\{S_k\}$, $S_k \Subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, образует покрытие последовательности Λ. Естественно ожидать (см., к примеру, результат Ф. А. Шамояна [Sh78, Теорема 2.2]), что если для некоторой функции $p \in \mathcal{P}$ с мерой Рисса ν_p при достаточно "мелком" покрытии $\{S_k\}$ для каждого множества $S_k \Subset \Omega$ значение $n_{\Lambda}(S_k)$ мажорируется величиной $\nu_p(S_k)$, то Λ — (под)последовательность нулей для $H^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$. Для такого мажорирования покрытие $\{S_k\}$ должно быть согласовано как со скоростью роста весов $p \in \mathcal{P}$ вблизи границы $\partial\Omega$, так и с возможными "зазорами" между функциями из $\mathcal{P}$. Основные результаты работы представляют собой явную количественную форму этого наблюдения. Минимальные требования на зазор между функциями из системы весов $\mathcal{P}$, при которых наш метод результативен, — условие

(L) *для любого веса $p \in \mathcal{P}$ найдутся вес $p_1 \in \mathcal{P}$ и постоянная C, при которых*

$$p(z) + \log\Bigl(1 + \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}\Bigr) + \log(1 + |z|) \leqslant p_1(z) + C \quad \text{для всех } z \in \Omega.$$

Ясно, что в левой части неравенства из условия (L) при $\Omega = \mathbb{C}$ отсутствует второе слагаемое, а для ограниченной области Ω можно отбросить $\log(1 + |z|)$. В определенном смысле наиболее "жесткий" класс функций, к которому применимы методы работы, — это пространство $H^{\uparrow}_{\mathcal{P}}(\Omega)$, построенное при фиксированной функции $p \in SH(\Omega)$, $p \not\equiv -\infty$, по системе весов

$$\mathcal{P} = \Bigl\{p(z) + C_1 \log\frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)} + C_2 \log(1 + |z|) \colon C_1, C_2 \geqslant 0\Bigr\}, \quad z \in \Omega,$$

и обозначаемое далее как $H_{p+\log}(\Omega)$.

Проиллюстрируем основные результаты работ [Kh04e], [Ch05a], [Kh05e] о последовательностях неединственности и их устойчивости в существенно *упрощенной и ослабленной форме* для *частных случаев* весовых алгебр и пространств в *ограниченной области* Ω. На функцию $p\in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_p будем накладывать условия вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\bigl(z+\varepsilon \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)e^{i\theta}\bigr)\,d\theta + a\log\Bigl(1+\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\Bigr)\leqslant bp(z)+C,\quad z\in\Omega. \tag{2}$$

Теорема 1 (неединственности)**.** *Пусть* $\{S_k\}$, $k=1,2,\dots,$ *— семейство борелевских попарно непересекающихся предкомпактных подмножеств из* Ω *и каждый компакт в* Ω *пересекается лишь с конечным числом подмножеств* S_k, *а последовательность* Λ *содержится в объединении* $\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$. *Тогда*

(U$_1$) *если* $p\geqslant 0$ *и для* $a=1$ *существуют* ε, $0<\varepsilon<1$, *и* $b,C\geqslant 0$, *при которых выполнено* (2), *а также* $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{\operatorname{diam} S_k}{\operatorname{dist}(S_k,\partial\Omega)}<2$ *и* $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{n_\Lambda(S_k)}{\nu_p(S_k)}<+\infty$, *то* Λ *— последовательность неединственности для алгебры* $A_p^\infty(\Omega)$;

(U$_2$) *если для* $a=1$ *при любом* ε, $0<\varepsilon<1$, *существуют* $b,C\geqslant 0$, *при которых выполнено* (2), *а также* $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{\operatorname{diam} S_k}{\operatorname{dist}(S_k,\partial\Omega)}<1$ *и* $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{n_\Lambda(S_k)}{\nu_p(S_k)}<+\infty$, *то* Λ *— подпоследовательность нулей для класса* $A_p^\infty(\Omega)$;

(U$_3$) *если* $p\geqslant 0$ *и для* $a=1$ *при любом* $b>1$ *найдутся* ε, $0<\varepsilon<1$, *и* $C\geqslant 0$, *при которых выполнено* (2), $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\operatorname{diam} S_k}{\operatorname{dist}(S_k,\partial\Omega)}=0$ *и* $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{n_\Lambda(S_k)}{\nu_p(S_k)}<1$, *то* Λ *— последовательность неединственности для пространства* $H_p^1(\Omega)$;

(U$_4$) *если при* $b=1$ *для некоторых* ε, $0<\varepsilon<1$, $C\geqslant 0$ *и* $a<0$ *выполнено* (2), *а* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{diam} S_k}{\operatorname{dist}(S_k,\partial\Omega)}\,\nu_p(S_k)<+\infty$ *и* $n_\Lambda(S_k)\leqslant\nu_p(S_k)$ *при всех достаточно больших* k, *то* Λ *— последовательность неединственности для* $H_{p+\log}(\Omega)$.

Параллельно установлены достаточные условия устойчивости последовательностей единственности для весовых пространств при вариации этих последовательностей. В теоремах устойчивости будет иметь значение подходящая нумерация последовательностей в области.

Теорема 2 (устойчивости)**.** *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_k\}$ *и* $\Gamma=\{\gamma_k\}$, $k=1,2,\dots,$ *— последовательности из* Ω *без предельных точек в* Ω. *Тогда*

(S$_1$) *если* $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\lambda_k-\gamma_k|}{\min\bigl\{\operatorname{dist}(\lambda_k,\partial\Omega),\operatorname{dist}(\gamma_k,\partial\Omega)\bigr\}}<2$ *и функция* p *такая же, как в* (U$_1$), *то* Λ *и* Γ *могут быть последовательностями единственности для алгебры* $A_p^\infty(\Omega)$ *лишь одновременно;*

(S$_2$) *если* $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\lambda_k-\gamma_k|}{\min\bigl\{\operatorname{dist}(\lambda_k,\partial\Omega),\operatorname{dist}(\gamma_k,\partial\Omega)\bigr\}}<1$ *и функция* p *такая же, как в* (U$_2$), *то* Λ *и* Γ *могут быть подпоследовательностями нулей для класса* $A_p^\infty(\Omega)$ *лишь одновременно;*

(S$_3$) *если* $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\lambda_k-\gamma_k|}{\min\bigl\{\operatorname{dist}(\lambda_k,\partial\Omega),\operatorname{dist}(\gamma_k,\partial\Omega)\bigr\}}=0$, *и функция* p *такая же, как в* (U$_3$), *то* Λ *и* Γ *могут быть последовательностями единственности для пространства* $H_p^1(\Omega)$ *лишь одновременно;*

(S$_4$) *если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|\lambda_k - \gamma_k|}{\min\bigl\{\operatorname{dist}(\lambda_k, \partial\Omega), \operatorname{dist}(\gamma_k, \partial\Omega)\bigr\}} < +\infty$, *и функция* p *такая же, как в* (U$_4$), *то* Λ *и* Γ *могут быть последовательностями единственности для пространства* $H_{p+\log}(\Omega)$ *лишь одновременно.*

Для областей Ω специального вида условия в теоремах неединственности и устойчивости могут быть значительно ослаблены. Так, если область Ω *выпукла*, то в посылках утверждений (U$_1$) и (S$_1$) в правой части неравенств, имеющих вид " $\dots < 2$", вместо цифры 2 можно поставить символ $+\infty$.

Все отмеченные достаточные условия точны в рамках рассматриваемых терминов и применяемых характеристик. Для специальных областей (круг) и более или менее конкретных систем $\mathcal{P}$ субгармонических функций-весов, определяющих весовое пространство, полученные достаточные условия для последовательностей неединственности совпадают с необходимыми.

В [Kh03a] установлены родственные результаты о минимально возможном росте ненулевых целых функций, обращающихся в нуль на заданной последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $0 \notin \Lambda$, в терминах *усредненной считающей функции*

$$N_\Lambda(r) := \int_0^r n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t)\,\frac{dt}{t}\,, \quad n_\Lambda^{\mathrm{rad}}(t) := \sum_{|\lambda_k|<t} 1.$$

Теорема 3 ([Kh03a, Теорема 1])**.** *Пусть функция* $\varepsilon\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *— убывающая и дифференцируемая при достаточно больших* $r > 0$ *и* $\liminf\limits_{r\to+\infty} r\varepsilon'(r) > -\infty$.

Для последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *в* $\mathbb{C}$ *существует целая функция* $f \not\equiv 0$, *обращающаяся в нуль на* Λ *с учетом кратности, для которой*

$$\max_{|z|=r} \log|f(z)| \leqslant O\left(\frac{1}{\varepsilon(r)}\, N_\Lambda\bigl((1+\varepsilon(r))\cdot r\bigr)\right), \quad r \to +\infty\,.$$

Аналог этого результата для единичного круга $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ —

Теорема 4 ([Kh05d, Теорема 1])**.** *Пусть функция* $d\colon [a,1) \to (0,1)$, *где* $0 \leqslant a < 1$, *выпукла или вогнута и удовлетворяет условию* $t < d(t) < 1$ *при всех* $a \leqslant t < 1$. *Для произвольной последовательности* Λ *в* $\mathbb{D}$ *найдется функция* $f \in H(\mathbb{D})$, $f \not\equiv 0$ *на* $\mathbb{D}$, *обращающаяся в нуль на* Λ *и удовлетворяющая соотношению*

$$\max_{|z|=r} \log|f(z)| \leqslant O\left(\frac{1}{d(r)-r}\, N_\Lambda\bigl(d(r)\bigr)\right), \quad r \to 1-0\,.$$

2. Последовательности нулей. В 2004–2005 гг. в [Kh04g], [kh04e], [kh05b] удалось распространить общую схему описания последовательностей неединственности для весовых пространств голоморфных функций на описание последовательностей нулей для них. В основе такого распространения также лежит абстрактное выметание и двойственное представление суперлинейных функционалов на проективном пределе векторных решеток. Для простоты и краткости сформулируем здесь только один результат для весовых пространств в единичном круге.

Через $\mathcal{U}_0^d(\mathbb{D})$ обозначим класс всех подобластей $D \Subset \mathbb{D}$, представимых в виде объединения конечного числа кругов $D(z;t) = \{w \in \mathbb{C}\colon |w-z| < t\} \Subset \mathbb{D}$, $0 \in D$.

Для $D \in \mathcal{U}_0^d(\mathbb{D})$ через $g_D(\cdot, 0)$ обозначаем *продолженную функцию Грина* для D с полюсом в $0 \in D$. В частности, $g_D(\zeta, 0) \equiv 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D$.

Для $M \colon [0,1) \to [0,+\infty)$ пусть M'_- — *левая производная* M. Положим

$$H(\mathbb{D}; M) := \Bigl\{ f \in H(\mathbb{D}) \colon \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \exp(-M(|z|)) < +\infty \Bigr\} \subset H(\mathbb{D}) .$$

Для функции $M(t) \equiv -p \log(1-t)$, $t \in [0,1)$, с $p \in [0,+\infty)$ пространство $H(\mathbb{D}; M)$ — это классическое пространство $\mathcal{A}^{-p}$ (см., например, [HKZ]).

Наша следующая теорема развивает результаты Б. Коренблюма, Е. Беллера, К. Сейпа, Д. Льюкинга и других о (под)последовательностях нулей для $\mathcal{A}^{-p}$ (см. [HKZ; Гл. 4]). Заметим, что в [Kh04g] установлены намного более общие результаты для весовых пространств $H(\Omega; M)$ голоморфных функций в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с субгармонической весовой функцией $M \colon \Omega \to [-\infty, +\infty)$.

Теорема 5 ([Kh04g, Теорема 0.1], [kh05b])**.** *Пусть $M \colon [0,1) \to [0,+\infty)$ — возрастающая функция, выпуклая от* $\log$ *на* $(0,1)$*, непрерывная в нуле. При условии*

$$\int_r^{1^-} (1-t) \, \mathrm{d}M(t) = O(1-r), \qquad r \to 1^-, \tag{3}$$

a) $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $0 \notin \Lambda$, *— последовательность нулей для* $H(\mathbb{D}; M)$ $\iff$

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_0^d(\mathbb{D})} \left(\sum_k g_D(\lambda_k, 0) - \int_0^{1^-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_D(te^{\theta}, 0) \, \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\bigl(tM'_-(t)\bigr) \right) < +\infty;$$

b) $\mathbb{D} \supset \Lambda$ *— последовательность нулей для* $H(\mathbb{D}; M)$ *тогда и только тогда, когда* Λ *— последовательность неединственности для* $H(\mathbb{D}; M)$.

3. Представление мероморфных функций. Методы, использованные для исследования последовательностей (не-)единственности или последовательностей нулей оказались плодотворными и применительно к задаче о представлении мероморфной функции с заданными ограничениями на рост той или иной ее характеристики как частного голоморфных функций, рост которых в определенной степени мажорируется характеристикой мероморфной функции.

Теорема 6 ([Kh03a, Теорема 1])**.** *Пусть функция ε такая же, как в теореме* 3. *Для произвольной мероморфной в $\mathbb{C}$ функции F с характеристикой Неванлинны T_F найдутся целые функции $f, g \in H(\mathbb{C})$, для которых $F = f/g$ и при $r \to +\infty$*

$$\log \max_{|z|=r} \{|f(z)|, |g(z)|\} \leqslant O\left(\frac{1}{\varepsilon(r)} \, T_F\bigl((1+\varepsilon(r))r\bigr) \right).$$

Теорема 7 ([Kh05d, Теорема 2])**.** *Пусть функция d такая же, как в теореме* 4. *Для произвольной мероморфной в $\mathbb{D}$ функции F с характеристикой Неванлинны T_F найдутся функции $f, g \in H(\mathbb{D})$, для которых $F = f/g$ и*

$$\log \max_{|z|=r} \{|f(z)|, |g(z)|\} \leqslant O\left(\frac{1}{d(r) - r} \, T_F\bigl(d(r)\bigr) \right), \quad r \to 1-0 .$$

В отношении представления мероморфной функции в виде частного голоморфных функций *без общих нулей* отметим один весьма частный случай результатов из [Kh04g, Теорема 0.1] и [kh03c]:

Теорема 8. *Пусть функция M та же, что и в теореме 5. При условии (3) мероморфная в $\mathbb{D}$ функция f/g, где $f,g\in H(\mathbb{D};M)$ и $f,g\not\equiv 0$, представляется в виде $f_0/g_0=f/g$, где $f_0,g_0\in H(\mathbb{D};M)$, но уже f_0 и g_0 не имеют общих нулей.*

4. Устойчивость последовательностей нулей и полноты. Получена новая аппроксимационная теорема для целых функций экспоненциального типа, позволяющая заменить последовательность нулей функции путем некоторой специальной рекуррентной процедуры на новую последовательность с сохранением индикатора при условии определенной близости этих последовательностей, а на ее основе установлены новые условия устойчивости свойства полноты систем экспонент в пространствах голоморфных на выпуклом компакте функций (см. [Kh04a], [kh03a], [kh03b]).

Пусть L — целая функция и $L(\lambda)=0$, $\gamma\in\mathbb{C}$. Сдвиг нуля λ функции L в точку γ порождает новую целую функцию, которую можно задать в виде

$$L_{[\lambda]}^{[\gamma]}(z)=\begin{cases}\dfrac{z-\gamma}{z-\lambda}\,L(z), & \text{если } \lambda=0 \text{ или } \gamma=0,\\[2mm] \dfrac{1-z/\gamma}{1-z/\lambda}\,L(z), & \text{если } \lambda\neq 0 \text{ и } \gamma\neq 0\,.\end{cases}$$

Пусть $L\not\equiv 0$ — целая функция и $\Lambda=\{\lambda_n\}\subset\mathrm{Zero}_L$, а $\Gamma=\{\gamma_n\}$ — последовательность в $\mathbb{C}$, $n=1,2,\dots$. Рекуррентно определим последовательность функций

$$L_1(z)=L(z),\quad L_{n+1}(z)=\bigl(L_n\bigr)_{[\lambda_n]}^{[\gamma_n]}(z),\quad n=1,2,\dots,\quad z\in\mathbb{C}. \tag{4}$$

Теорема 9 (аппроксимационная, [Kh04a, Теорема 1])**.** *Пусть $L\not\equiv 0$ — целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) с индикатором роста h_L, $\Lambda\subset\mathrm{Zero}_L$, а $\Gamma=\{\gamma_n\}$ — последовательность в $\mathbb{C}$, $n=1,2,\dots$, $\{L_n\}$ — рекуррентная последовательность ц.ф.э.т. из* (4)*. Далее, пусть сходится ряд*

$$\sum_{\gamma_n\cdot\lambda_n\neq 0}\Bigl|\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\gamma_n}\Bigr|<\infty\,. \tag{5}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ найдется постоянная C_ε, с которой выполнены равномерные оценки

$$\bigl|L_n(z)\bigr|\leqslant C_\varepsilon\exp\Bigl(\bigl(h_L(\theta)+\varepsilon\bigr)r\Bigr)\ \text{при всех } n\in\mathbb{N},\ z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}\,,$$

и последовательность ц.ф.э.т. $\{L_n\}$ сходится в топологии равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{C}$ к некоторой ц.ф.э.т. $G\not\equiv 0$ такой, что $\mathrm{Zero}_G=(\mathrm{Zero}_L\setminus\Lambda)\cup\Gamma$ и индикатор роста h_G функции G равен индикатору роста h_L.

Для компакта $B\subset\mathbb{C}$ через $H(B)$ обозначаем пространство ростков голоморфных функций на B с естественной топологией индуктивного предела.

Теорема 10 ([Kh04a, Следствие 2])**.** *Пусть B — выпуклый компакт, $\{\lambda_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ — последовательности в $\mathbb{C}$. Если выполнено* (5) *или $\lim\limits_{n\to\infty}\bigl|1-\gamma_n/\lambda_n\bigr|=0$, то системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ и $\{e^{\gamma_n z}\}$ полны или не полны в $H(B)$ одновременно.*

5. Спектральный синтез. Аппроксимационная теорема 9 в уточненном и усиленном виде применена к выявлению геометрических условий, при которых пересечение двух инвариантных подпространств голоморфных в выпуклой области функций, допускающих спектральный синтез, также наследует последнее свойство при условии близости спектров инвариантных подпространств.

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, векторное подпространство $W \subset H(\Omega)$ инвариантно относительно дифференцирования. Подпространство W допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в $H(\Omega)$ (в топологии равномерной сходимости на компактах из Ω) линейной оболочки всех функций $z^k e^{\lambda z} \in W$. Каждой последовательности Λ в $\mathbb{C}$ можно сопоставить в $H(\Omega)$ инвариантное подпространство $W(\Lambda)$, полученное замыканием линейной оболочки системы экспонент

$$\mathrm{Exp}_\Lambda := \{z^k e^{\lambda z} \colon 0 \leqslant k < n_\Lambda(\lambda)\}, \quad z \in \Omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Очевидно, подпространствами такого вида исчерпываются все подпространства, допускающие спектральный синтез. Полагаем $\log^+ t = \max\{0, \log t\}$. Частный случай основного результата работы [Kh05a, Основная теорема] —

Теорема 11. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_n\}$ — две последовательности в $\mathbb{C}$, и система Exp_Λ неполна в $H(D)$, где $D \Subset \Omega$ — выпуклая подобласть. Положим $d = \mathrm{dist}(D, \partial\Omega)$, $p = p(D)$ — периметр D. Если*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log\left(\sum\limits_{k\geqslant n}\left|\dfrac{1}{\lambda_k} - \dfrac{1}{\gamma_k}\right|\right)}{\max\limits_{k\leqslant n}|\lambda_k|} \leqslant -\frac{p}{2\pi}\left(1 + e\log^+\frac{ep}{2\pi d}\right), \tag{6}$$

то $W(\Lambda)\bigcap W(\Gamma)$ допускает спектральный синтез в $H(\Omega)$.

Как следствие даются условия близости нулей характеристических функций системы однородных уравнений свертки в области или на интервале, при которых каждое решение системы аппроксимируется ее элементарными решениями. Одновременно, используя слабо достаточные множества и сэмплинг-последовательности, разработаны два различных достаточно общих приема построения инвариантных подпространств, пересечение которых уже не допускает спектральный синтез. Приведем один из таких приемов.

Через $\mathcal{T}$ обозначаем класс 2π-периодических тригонометрически выпуклых функций. Каждой функции $h \in \mathcal{T}$ при любых α и β, $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$, можно сопоставить функцию

$$s_h(\alpha, \beta) := \Big(h'(\beta - 0) - h'(\alpha + 0) + \int_\alpha^\beta h(\theta)\, d\theta\Big). \tag{7}$$

Пусть Ω — ограниченная выпуклая область с опорной функцией

$$h(\theta) = h_\Omega(\theta) := \sup_{z\in\Omega} \operatorname{Re} z e^{-i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

которая всегда принадлежит классу $\mathcal{T}$. Тогда величина (7) имеет простой геометрический смысл — это длина дуги границы $\partial\Omega$ области Ω, заключенная между точками касания двух опорных прямых к области Ω, ортогональных направлениям[2] соответственно α и β. В таком контексте мы будем обозначать величину (7) как $s_\Omega(\alpha,\beta) := s_{h_\Omega}(\alpha,\beta)$.

Для последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}$ через $n_\Lambda(r_1, r_2; \alpha, \beta)$ обозначаем число точек из Λ, попавших в множество $\{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z| \leqslant r_2,\ \alpha \leqslant \arg z < \beta\}$.

Минимальная угловая плотность последовательности Λ задается как

$$d_\Lambda(\alpha,\beta) := \lim_{\varepsilon\to+0} \liminf_{r\to\infty} \frac{n_\Lambda\bigl(r, (1+\varepsilon)r; \alpha, \beta\bigr)}{\varepsilon r},$$

а *индекс конденсации* —

$$\gamma_\Lambda := \lim_{\varepsilon\to+0} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \int_0^{\varepsilon|\lambda_k|} \frac{n(\lambda_k; t) - 1}{t}\, dt,$$

где $n_\Lambda(z;t)$ означает число точек из Λ в открытом круге $D(z,t) \subset \mathbb{C}$ с центром z радиуса t; $\overline{D(z,t)}$ — замыкание этого круга.

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ симметричную ей относительно вещественной оси $\mathbb{R}$ последовательность $\{\overline{\lambda}_k\}$ обозначаем через $\overline{\Lambda}$ и называем ее последовательностью, сопряженной к Λ.

В приведенных терминах и обозначениях мы можем сформулировать наш первый результат по рассматриваемой задаче:

Теорема 12 ([Kh05b, Теорема 1]**).** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — выпуклая ограниченная область. Пусть последовательность Λ содержит некоторую подпоследовательность $\overline{\Gamma}$, сопряженную к последовательности Γ с нулевым индексом конденсации $\gamma_\Gamma = 0$, для которой $2\pi d_\Gamma(\alpha,\beta) \geqslant s_\Omega(\alpha,\beta)$, $\quad \forall \alpha,\beta\colon \quad \alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$. Тогда при любом представлении Λ в виде объединения двух непустых подпоследовательностей $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ при нетривиальных $W(\Lambda_1)$ и $W(\Lambda_2)$ в H пересечение $W(\Lambda_1) \cap W(\Lambda_2)$ не допускает спектральный синтез на Ω.*

6. Замкнутые идеалы и подмодули в пространствах функций. Получены условия весьма общего и в то же время легко проверяемого характера, при которых замкнутый идеал (соответственно подмодуль над кольцом многочленов) в алгебре (соответственно пространстве) голоморфных функций порождается не более чем двумя функциями. В двойственной постановке для ряда функциональных пространств это означает, что инвариантные относительно дифференцирования подпространства в них, допускающие спектральный синтез, могут быть представлены как пространства решений системы двух однородных уравнений свертки.

Всюду далее Ω — область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций; $\mathcal{P} \subset H(\Omega)$ — некоторое *отделимое локально выпуклое пространство над полем* $\mathbb{C}$, называемое далее, для краткости, просто *пространством.* Всюду будем предполагать, что *топология в $\mathcal{P}$ мажорирует топологию поточечной сходимости на* Ω.

Пространство $\mathcal{P}$ *устойчивое*, если для любых функции $f \in \mathcal{P}$ и точки $\lambda \in \mathbb{C}$ из условия $f(z)/(z-\lambda) \in H(\Omega)$ следует $f(z)/(z-\lambda) \in \mathcal{P}$.

[2]Направление α — это направленный к бесконечности луч $\{te^{i\alpha}\colon t \geqslant 0\}$.

Пространство $\mathcal{P}$ называется *равномерно устойчивым* [Kr79], если для любой окрестности нуля $V \subset \mathcal{P}$ найдется окрестность нуля $U \subset \mathcal{P}$ такая, что множество $\big\{f(z)/(z-\lambda) \in H(\Omega) : f \in U, \lambda \in \mathbb{C}\big\}$ содержится в V.

Пространство $\mathcal{P}$ *b-устойчиво* [Kr79], если для любого ограниченного в $\mathcal{P}$ множества $B \subset \mathcal{P}$ множество $\big\{f(z)/(z-\lambda) \in H(\Omega) : f \in B, \lambda \in \mathbb{C}\big\}$ содержится и ограничено в $\mathcal{P}$.

Пространство $\mathcal{P}$ называется *аналитически уплотненным* [Kr79], если множество $\big\{f \in H(\Omega) : |f(z)| \leqslant |f_1(z)| + \dots + |f_k(z)|,\ z \in \Omega\big\}$ содержится и ограничено в $\mathcal{P}$ для любого конечного набора $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{P}$.

Если пространство $\mathcal{P}$ — *топологический модуль над кольцом многочленов* $\mathbb{C}[z]$, $z \in \mathbb{C}$, или *топологическая алгебра, содержащая* $\mathbb{C}[z]$, то для краткости называем $\mathcal{P}$ просто *модулем* или соответственно (далее соотв.) *алгеброй.*

Подпространство I модуля $\mathcal{P}$ — *подмодуль* (над $\mathbb{C}[z]$), если для любых многочленов $p \in \mathbb{C}[z]$ и $f \in \mathcal{P}$ имеем $pf \in I$. Если $\mathcal{P}$ — алгебра (содержащая по соглашению многочлены), то каждый идеал в $\mathcal{P}$ — подмодуль.

Замкнутый подмодуль (соотв. идеал) I модуля (соотв. алгебры) $\mathcal{P}$ — (топологически) *n-порожденный,* $n \in \mathbf{N}$, если для некоторого набора n элементов $g_1, \dots, g_n \in I$ он совпадает с замыканием в $\mathcal{P}$ множества элементов вида $p_1 g_1 + \dots + p_n g_n$, где $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[z]$ (соотв. $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$). Сам подмодуль (идеал) I обозначаем при этом как $\bar{I}(g_1, \dots, g_n)$. Подмодуль (идеал) *главный*, если он 1-порожденный. Замкнутый подмодуль $I \subset \mathcal{P}$ (топологически) *порожден подмодулями* $I_1, \dots, I_n$, если I есть замыкание множества элементов вида $i_1 + \dots + i_n$, где $i_1 \in I_1, \dots, i_n \in I_n$.

На основе программных исследований И. Ф. Красичкова-Терновского [Kr79] задачи локального описания замкнутых подмодулей в пространствах голоморфных функций одной переменной в настоящем сообщении приводятся признаки, при которых *замкнутый подмодуль (идеал) I в модуле (соотв. алгебре) $\mathcal{P}$ — 2-порожденный* или *порожден двумя специальными подмодулями (соотв. идеалами).* Отметим, что даже в алгебрах не каждый замкнутый идеал — главный, например, в алгебрах целых функций конечного типа при целом порядке ρ.

Далее всюду под последовательностью в Ω понимается пустая, конечная или бесконечная последовательность вида $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \Omega$, где $n = 1, 2, \dots$, не имеющая предельных точек в Ω. Функция $\Lambda(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, равная числу повторений точки λ в последовательности Λ, — *дивизор последовательности* Λ. Отношения и операции $=,\ \subset,\ \setminus,\ \cup,\ \cap$ для последовательностей определяются соответственно через поточечные отношения и операции $\equiv,\ \leqslant,\ -,\ +,\ \inf$ для их дивизоров.

Для ненулевой функции $f \not\equiv 0$ из $H(\Omega)$ последовательность всех корней функции f, перенумерованную с учетом кратности, обозначаем Zero_f.

Для подмодуля (идеала) I в модуле (соотв. в алгебре) $\mathcal{P}$ полагаем $\mathrm{Zero}_I = \cap_{f \in I} \mathrm{Zero}_f$ — *последовательность нулей подмодуля (идеала) I.*

Последовательности $\Lambda \subset \Omega$ сопоставляем в модуле (алгебре) $\mathcal{P}$ подмодуль (соотв. идеал) $I(\Lambda) = \{f \in \mathcal{P} : \Lambda \subset \mathrm{Zero}_f\}$. Очевидно, если $\mathcal{P}$ — устойчивый модуль и $I(\Lambda) \neq \{0\}$, то $\mathrm{Zero}_{I(\Lambda)} = \Lambda$ для любой последовательности Λ. Если $\Lambda = \mathrm{Zero}_f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{P}$, то вместо $I(\Lambda)$ пишем также I_f. Отметим, что, вообще говоря, $I_f \neq \bar{I}(f)$, т.е. I_f не обязательно главный подмодуль (соотв. главный идеал).

Подмодуль (идеал) I модуля (соотв. алгебры) $\mathcal{P}$ *допускает локальное описа-*

ние, или в терминологии [Kr79] *обильный*, если $I = I(\mathrm{Zero}_I)$.

Пусть $\mathcal{P}$ — устойчивый модуль (устойчивая алгебра). Тогда подмодуль (соотв. идеал) вида $I(\Lambda)$ в $\mathcal{P}$ — обильный. При этом $\bar{I}(f) = I_f$, если и только если главный подмодуль (соотв. идеал) $\bar{I}(f)$ — обильный.

Обильные подмодули и идеалы и их свойства играют важнейшую роль в спектральной теории операторов и часто оказываются решающим фактором, обычно в двойственной постановке, в задачах спектрального анализа–синтеза, интерполяции, в исследованиях уравнений свертки, в вопросах весовой аппроксимации многочленами, экспонентами, и т.д. (подробнее см. введения в [Kr79]).

Алгебры $\mathcal{P}$. В случае алгебр $\mathcal{P} \subset H(\Omega)$ справедлива

Теорема 13 ([Kh04d]). *Пусть аналитически уплотненная алгебра $\mathcal{P}$ либо равномерно устойчива, либо $\mathcal{P}$ — b-устойчивое борнологическое пространство. Если в замкнутом идеале I есть функция $f \not\equiv 0$, для которой главный идеал $\bar{I}(f)$ обильный, то I — 2-порожденный и обильный.*

Модули $\mathcal{P}$. Один из типичных результатов для модулей $\mathcal{P} \subset H(\Omega)$ —

Теорема 14 ([Kh04b]). *Пусть модуль $\mathcal{P}$ — аналитически уплотненный и еще либо равномерно устойчив, либо $\mathcal{P}$ — b-устойчивое борнологическое пространство. Пусть обильный подмодуль I из $\mathcal{P}$ содержит функцию f такую, что некоторая функция из $\mathcal{P}$ не имеет общих нулей с f, а в случае неограниченной области Ω дополнительно для некоторой функции $\Phi(r) \geqslant 1$ на $[0, +\infty)$, удовлетворяющей условию $\ln r = o\bigl(\Phi(r)\bigr)$ при $r \to +\infty$, множество $\bigl\{g \in H(\Omega) : |g(z)| \leqslant \Phi(|z|)\bigl(1 + |f(z)|\bigr),\ z \in \Omega\bigr\}$ содержится и ограничено в $\mathcal{P}$. Тогда подмодуль I порожден двумя подмодулями I_f и I_g, где g — некоторая функция из I. В частности, при тех же условиях, если все главные подмодули в $\mathcal{P}$ обильные, то I — 2-порожденный и $I = \bar{I}(f, g)$ для некоторой $g \in I$.*

7. Другие важные результаты. Установлены специфические свойства мер Йенсена и Аренса-Зингера (аналогов и обобщений гармонической меры), а также двойственных им функций Йенсена и Аренса-Зингера (аналогов и обобщений функций Грина), на основе которых получены новые общие критерии (суб-)гармоничности функций в области n-мерного пространства (см. [Kh03b]). Последнее лежит в основе используемого в проекте метода абстрактного выметания, получившего в последние три года дальнейшее развитие уже для двойственного представления суперлинейных функционалов на несчетных проективных пределах векторных решеток [Kh04g], [Kh05c], [Lu05a], [kh04b], [khf04], [lu05a].

Завершен детальный обзор [Kh06a] по полноте систем экспонент в пространствах голоморфных, непрерывных или гладких функций на подмножествах комплексной плоскости, n-мерного вещественного или комплексного пространства.

3.7. Степень новизны полученных в 2003–2005 гг. результатов

Все описанные в предыдущем пункте 3.6 результаты являются новыми и пересечение их с ранее известными фактами носят в значительной степени строго включающий характер. Отдельные вопросы, решение которых намечалось, разработаны в существенно более общей ситуации, чем намечалось (см. [Kh04b], [Kh04g], [Kh05e]). Основные используемые методы либо являются принципиально новыми, либо представляют собой далеко идущее развитие ранее известных.

3.8. Сопоставление полученных в 2003–2005 гг. результатов с мировым уровнем

Наши описания множеств неединственности и нулевых множеств для классов функций, голоморфных в области на комплексной плокости, дополняют и существенно развивают результаты Джрбашяна М. М., Шамояна Ф. А. и других представителей армянской математической школы, исследования израильских и американских математиков в 1970-1990-е годы (Б. Коренблюм, Е. Беллер, К. Горовиц, Д. Льюкинг и др.), К. Сейпа и Ю. Любарского (Норвегия), Х. Бруны, Х. Массанеды (Испания) и др. (см. [Sh78], [HKZ], [Sh85]–[Lu96]).

Полученная новая аппроксимационная теорема для целых функций экспоненциального типа и ее применение к задаче спектрального синтеза для пересечений инвариантных подпространств охватывает, как очень частный, задачу представления пространства решений системы однородных уравнений свертки в виде замыкания линейной оболочки элементарных решений — чаще всего систем экспонент. В случае одного уравнения свертки или системы с характеристическими функциями-полиномами количество результатов подобного рода в мировой математической литературе необозримо. В то же время для случая системы однородных уравнений свертки с достаточно произвольными характеристическими функциями наши результаты — одни из первых, наряду с [Ab00].

Условия конечнопорожденности идеалов в алгебрах голоморфных функций были предметом исследования, к примеру, представителей американской школы теории функций комплексных переменных (Б. А. Тейлор и др.; см. [Br87]). Их результаты относятся к частным алгебрам функций. Наши же носят общий характер, распространяются на существенно более сложный случай подмодулей и содержат в себе как очень частный случай все ранее известные факты этого направления.

По полноте систем экспонент на интервале вещественной оси написаны десятки монографий и обзоров (Л. Шварц [Sch43], Р. Редхеффер [Re74], А. М. Седлецкий [Sed05] и многие другие), охватывающие все известные материалы вплоть до 2005 г. В то же время не существовало сколь-нибудь подробного обзора по полноте систем экспонент в пространствах функций на подмножествах комплексной плоскости и n-мерного вещественного или комплексного пространства. Монография-обзор [Kh06a] руководителя проекта, содержащая к тому же принципиально новые доказательства классических и ранее известные результаты по полноте систем экспонент, призвана восполнить этот пробел.

3.9. Методы и подходы, использованные в ходе выполнения проекта в 2003–2005 гг.

Описания множеств (не-)единственности и нулевых множеств для весовых пространств голоморфных функций, а также исследования их устойчивости и вопросы представления мероморфных функций сводятся к определению возможности двойственного представления суперлинейных функционалов на проективных пределах векторных решеток и к оценкам выметаний специальных классов мер и функций (далее — метод абстрактного выметания). Такой принципиально новый и оригинальный метод, разработка которого была начата руководителем проекта еще в конце 1980-х годов, получил дальнейшее развитие в ходе выполнения проекта в 2003–2005 гг. Так, одно из основных достижений 2005 года — критерий для последовательности нулей в равномерном пространстве Бергмана (см. [Kh04g], [kh04e], [kh05b]) — было основано на применении метода абстрактного выметания не только к описанию множеств (не-)единственности, но и в усовершенствованной форме к описанию нулевых множеств.

Исследования устойчивости полноты систем экспонент в пространствах голоморфных функций на компакте основаны на переносе на такие пространства метода рекурсий Редхеффера–Александера, применявшегося ранее только к классическим пространствам функций на отрезке. При этом тривиальные моменты для пространств функций на отрезке отнюдь не являются таковыми в рассматриваемых нами пространствах.

Условия возможности локального описания замкнутых идеалов и подмодулей и их конечнопорожденности в общих пространствах голоморфных функций получены методом, основные этапы которого заложены в абстрактном критерии возможности такого описания, принадлежащем И. Ф. Красичкову-Терновскому (см. [Kr79]). Применение его к общим пространствам голоморфных функций потребовало существенного развития аналитической части его исследований, что позволило охватить, в частности, самые общие весовые пространства с очень малыми “зазорами” между весовыми полунормами, определяющими топологию пространства.

I. Статьи и монография по проекту № 03-01-00033а

[Kh03a] *Хабибуллин Б. Н.,* Рост целых функций с заданными нулями и представление мероморфных функций // Математические заметки. 2003. Т. 73. Вып. 1. С. 120–134.

[Kh03b] *Хабибуллин Б. Н.,* Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-) гармонических функций // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 4. № 4. С. 905–925.

[Ch03a] *Чередникова Л. Ю.,* Относительный диаметр подмножества в области // III Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Материалы конференции. Математика. Т. 2. Уфа. БашГУ. 2003. С. 152–162.

[Kh04a] *Хабибуллин Б. Н.,* Аппроксимационная теорема для целых функций экспоненциального типа и устойчивость нуль-последовательностей // Математический сборник. 2004. Т. 195. № 1. С. 143–156.

[Kh04b] *Хабибуллин Б. Н.,* Замкнутые подмодули голоморфных функций с двумя порождающими // Функциональный анализ и его приложения. 2004. Т. 38. № 1. С. 65–80.

[Kh04c] *Khabibullin B. N.,* Asymptotic behavior of the difference of subharmonic functions // Matematychni Studii. Lviv. 2004. T. 21. № 1. C. 47–63.

[Kh04d] *Хабибуллин Б. Н.,* Замкнутые идеалы голоморфных функций с двумя порождающими // Математические заметки. 2004. Т. 76. Вып. 4. С. 604–609.

[Kh04e] *Хабибуллин Б. Н.,* Нулевые подмножества для весовых классов голоморфных функций // Вестник Башкирского государственного университета. 2004. № 2. С. 59–63.

[Kh04f] *Хабибуллин Б. Н.,* Целые функции-миноранты: опыт применения оценок Мацаева–Островского–Содина // Математическая физика, анализ, геометрия (Украина). 2004. Т. 11. № 4. С. 518–536.

[Kh04g] *Khabibullin B. N.,* Zero (sub)sets for spaces of holomorphic functions and (sub)harmonic minorants // http://arxiv.org/abs/math.CV/0412359. Electronic Archive at LANL. P. 1–42.

[Kh05a] *Хабибуллин Б. Н.,* Спектральный синтез для пересечения инвариантных подпространств голоморфных функций // Математический сборник. 2005. Т. 196. № 3. С. 119–142.

[Ch05a] *Чередникова Л. Ю.,* Множества неединственности для весовых алгебр голоморфных в круге функций // Математические заметки. 2005. Т. 77. Вып. 5. С. 775–787.

[Kh05b] *Хабибуллин Б. Н.,* Два общих условия недопустимости спектрального синтеза для инвариантных подпространств голоморфных функций // Владикавказский математический журнал. 2005. Т. 7. С. 71–78.

[Kh05c] *Хабибуллин Б. Н.,* Теоремы единственности для голоморфных функций и выметание // В сб.: Исследования по теории операторов, комплексному анализу и математическому моделированию. Владикавказ: изд-во ВНЦ РАН, 2005. С. 120-135.

[Lu05a] *Lubyshev V. F.,* On dual representation of a mapping on a projective limit of vector lattice // Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых. 2005 (30 ноября–6 декабря). Сборник трудов. Математика. Том III. ООО "ИдельИнвест". С. 64–70.

[Kh05d] *Хабибуллин Б. Н.,* Нулевые подмножества, представление мероморфных функций и характеристики Неванлинны в круге // Математический сборник (принята к печати в 2005 г.)

[Kh05e] *Хабибуллин Б. Н.,* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций и энтропия линейной связности // Известия РАН. Серия математическая (в печати с 2004 г.).

[Kh06a] *Хабибуллин Б. Н.,* Полнота систем экспонент и множества единственности. Уфа: РИО БашГУ. ООО "ИдельИнвест", 2006. 216 с. (принята к печати в 2005 г.)

II. Тезисы докладов по проекту № 03-01-00033а

[khc03] *Хабибуллин Б. Н., Чередникова Л. Ю.,* Последовательности неединственности для весовых алгебр голоморфных функций в единичном круге // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 19. Материалы VI летней школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". Казань. 2003. С. 221–223.

[kh03a] *Хабибуллин Б. Н.,* Аппроксимационная теорема для целых функций и устойчивость полноты систем экспонент // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные вопросы", Воронеж. 2003 (26 января–2 февраля). С. 271–272.

[kh03b] *Khabibullin B. N.,* Closeness of subharmonic and entire functions, stability of completeness of exponential systems, spectral synthesis // Second International Conference "Mathematical Analysis and Economics", Sumy–Kharkiv–Kiev. April 1-4, 2003. P. 24-25.

[kh03c] *Khabibullin B. N.,* The representation of a meromorphic function as the quotient of holomorphic functions // International Conference "Complex Analysis and its Applications". Lviv. Ukraine, May 26–29, 2003. P. 78–79.

[khc04] *Хабибуллин Б. Н., Чередникова Л. Ю.,* Множества неединственности для весовых алгебр голоморфных функций в единичном круге // Тезисы докладов. 12-я Саратовская зимняя школа-конференция "Современные проблемы теории функций и их приложения", Саратов (27 января–3 февраля 2004 г.). С. 189–190.

[2kh04] *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.,* Zero subsets for spaces of function and the entropy of arcwise connectedness // Материалы международной школы-семинара "Геометрический анализ и его применения", Волгоград. 2004. С. 193–195.

[kh04a] *Хабибуллин Б. Н.,* О нулях функций, голоморфных в угле // Весенняя школа "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XV". Воронеж. 2004 (5–8 мая). С. 223–224.

[kh04b] *Хабибуллин Б. Н.,* Абстрактное выметание в теории функций // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 23. Материалы международной конференции "Алгебра и анализ"(КГУ, МГУ). 2004 (2–8 июля). С. 39–40.

[khf04] *Хабибуллин Ф. Б.,* О несуществовании решения для одной системы нелинейных эллиптических уравнений // IV Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Уфа. 2004. С. 18.

[kh04c] *Хабибуллин Б. Н.,* Нулевые подмножества и представление мероморфных функций в круге // Труды международной школы-семинара по геометрии и анализу. Абрау-Дюрсо (5–11 сентября, 2004). 2004. Ростов-на-Дону (МГУ, РГУ). С. 160–161.

[kh04e] *Khabibullin B. N.,* Zero sets for the space $A^{-\alpha}$ in the unit disk // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 25. Материалы конференции "Актуальные проблемы математики и механики". 2004 (21–27 сентября). С. 296–297.

[kh05a] *Khabibullin B. N.,* Completeness of exponential systems // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные проблемы теории функций и смежные вопросы". Воронеж. 2005 (27 янв.-2 фев.). С. 7-8.

[kh05b] *Khabibullin B. N.,* Zero (sub)sets for weighted spaces of holomorphic functions // Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященная столетию С.М. Никольского. Тезисы. Москва. 2005 (23–29 мая). С. 307.

[kh05c] *Хабибуллин Б. Н.,* Геометрические условия недопустимости спектрального синтеза // Материалы Седьмой Казанской летней школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". 2005 (27 июня–4 июля). С. 112.

[kh05d] *Khabibullin B. N.,* On the representation of meromorphic functions // Abstracts of International Conference "Analysis and related topics". L'viv (Ukraine). 2005 (17–20 ноября). С. 48.

[lu05a] *Лубышев В. Ф.,* Структура линейных функционалов на проективном пределе векторных решеток // Международная уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых. 2005 (30 ноября–6 декабря). Тезисы докладов. БГУ. С. 56.

[ch06a] *Чередникова Л. Ю.,* Энтропия линейной связности и системы положительных субгармонических функций // IV Всесибирский конгресс женщин-математиков. Тезисы докладов. Красноярск. 15–18 января 2006 г. РИО СибГТУ (принято к печати).

III. Дополнительная библиография

[Sh78] *Шамоян Ф. А.,* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1978. Т. XIII. № 5–6. С. 405–422.

[HKZ] *H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu,* Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics. 199. New York: Springer-Verlag. 2000.

[Kr79] *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I, II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66; 1979. Т. 43. No 2. С. 309–341.

[Sh85] *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники, серия матем. анализ. 1985. Т. 23. С. 3–124.

[Al85] *Александров А. Б.* Теория функций в шаре // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985. Т. 8. С. 115–190.

[He98] *Hedenmalm H.* Recent Progress in the Function Theory of the Bergman Space // Holomorphic Spaces. MSRI Publ. Cambridge. 1998. V. 33. P. 35–50.

[Co85] *Colwell P.* Blaschke Product. Bounded Analytic Functions // Ann Arbor. The University of Michigan Press. 1985.

[DS88] *Djrbashian A., Shamoyan F. A.* Topics in the theory of A^p_α spaces. Leipzig: Teubner-Texte, 1988.

[Sh83] *Шамоян Ф. А.* О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1983. Т. XVIII. № 1. С. 15–27.

[Ho95] *Horowitz C.* Zero sets and radial zero sets in function spaces // J. Analyse Math. 1995. V. 65. P. 145–159.

[Ko75] *Korenblum B.* An extension of the Nevanlinna theory // Acta Math. 1975. V. 135. P. 187–219.

[Be77] *Beller E.* Factorization for non-Nevanlinna classes of analytic functions // Israel J. Math. 1977. V. 27. No. 3–4. P. 320–330.

[BH94] *Beller E., Horowitz C.* Zero sets and random zero sets in certain function spaces // J. Analyse Math. 1994. V. 64. P. 203–217.

[Se95] *Seip K.* On Korenblum's density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$ // J. Analyse Math. 1995. V. 67. P. 307–322.

[BM95] *Bruna J., Massaneda X.* Zero sets of holomorphic functions in the unit ball with slow growth // J. Analyse Math. 1995. V. 66. P. 217–252.

[Lu96] *Luecking D.* Zero sequences for Bergman spaces // Complex Variables. 1996. V. 30. P. 345–362.

[Ab00] *Абузярова Н. Ф.* Конечно порожденные подмодули в модулях целых функций, определяемых ограничениями на индикатор. Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. Уфа. 2000.

[Br87] *Braun R. W.* Weighted algebras of entire functions in which each closed ideal admits two algebraic generators. // Mich. Math. J. 1987. V. 34. N 3. P. 441–450.

[Sch43] *Schwartz L.* Etude des sommes d'exponentielles // Actualités. scient. et industr. No. 959. Paris: Hermann, 1943 (2e ed. 1959).

[Re74] *Redheffer R. M.* Completeness of sets of complex exponentials // Adv. in Math. 1977. V. 24. P. 1–62.

[Sed05] *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации М.: Физматлит, 2005. 504 стр.