Алгебра и анализ
Том 26 (2014), №2

# ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НУЛЕЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ БЕРНШТЕЙНА И ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ НА ИНТЕРВАЛЕ

© Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Г. Р. ТАЛИПОВА, Ф. Б. ХАБИБУЛЛИН

Пусть $\sigma > 0$. Через $B_\sigma^\infty$ обозначаем пространство всех целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma$, ограниченных на вещественной оси. Мы даем различные точные описания последовательностей единственности для пространств Бернштейна $B_\sigma^\infty$ в терминах числа $\sigma$ и преобразований Пуассона и Гильберта. Эти описания позволяют получить критерии полноты систем экспонент в различных классических пространствах функций на отрезке или интервале длины $d$ с точностью до одной или двух экспонент.

## §1. Введение

**1.1. Основные определения, понятия, обозначения.** Через $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z < 0\}$ обозначаем открытые верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $\mathbb{C}_\pm := \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ — вещественная ось; $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — сфера Римана; $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — открытый единичный круг с центром в нуле. Используем также обозначения $\mathbb{R}_* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{D}_* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ для ,,проколотых“ соответственно вещественной оси, комплексной плоскости и единичного круга $\mathbb{D}$.

Для $S \subset \mathbb{C}_\infty$ через $\overline{S}$ и $\partial S$ обозначаем соответственно его замыкание и границу в $\mathbb{C}_\infty$, но для $S \subset \mathbb{R}$ границу $S$ в $\mathbb{R}$ обозначаем как $\partial_{\mathbb{R}} S$.

Через $I_d \subset \mathbb{R}$ (соответственно $\overline{I}_d$) обозначаем открытый (соответственно замкнутый) интервал длины $d$.

Через $\operatorname{Hol}(\Omega)$, $\operatorname{sbh}(\Omega)$ и $\operatorname{har}(\Omega)$ обозначаем классы соответственно голоморфных, субгармонических и гармонических функций в области $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$.

---

*Ключевые слова:* целая функция, пространство Бернштейна, последовательность единственности, полнота экспонент, интеграл Пуассона, преобразование Гильберта.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00030a) и ФЦП ,,Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“, соглашение №14.B37.21.0358.

Пусть

$$\Lambda = \{\lambda_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

— не более чем счетная последовательность точек в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ *без точек сгущения внутри* $\Omega$. Среди точек $\lambda_k$ могут быть и повторяющиеся. Возможно, что $\Lambda = \varnothing$ — *пустое множество*. С каждой последовательностью $\Lambda$ связываем целочисленную положительную *считающую меру* $n_\Lambda$ на $\Omega$ (дивизор) по правилу

$$n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1, \quad S \subset \Omega, \tag{1.2}$$

— число точек $\lambda_k$, содержащихся в $S$. Для точки $z \in \mathbb{C}$ полагаем $n_\Lambda(z) := n_\Lambda\bigl(\{z\}\bigr)$, но $n_\Lambda^{\text{rad}}(t) := n\bigl(t\overline{\mathbb{D}}\bigr)$, $t \geqslant 0$, — радиальная *считающая функция* последовательности $\Lambda$. Далее операции над последовательностями, отношения между ними и многие другие понятия согласованы с [1].

Сопоставим последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ систему (кратных) экспонент

$$\operatorname{Exp}^\Lambda := \bigl\{z \mapsto z^{p-1}e^{i\lambda z} : z \in \mathbb{C},\ \lambda \in \Lambda,\ 1 \leqslant p \leqslant n_\Lambda(\lambda),\ p \in \mathbb{N}\bigr\}, \tag{1.3}$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Появление в (1.3) мнимой единицы $i$ в показателях экспонент обусловлено большей частью традицией, принятой при рассмотрении полноты систем экспонент в пространствах на подмножествах вещественной оси (см. [2–5], ср. с [1]), и использованием преобразования Фурье. Под системой $\operatorname{Exp}^\Lambda$ *на подмножестве* $S \subset \mathbb{C}$ понимаем, как обычно, систему из сужений функций из (1.3) на $S$.

Пусть $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ на $\Omega$. Последовательность нулей функции $f$ в $\Omega$, перенумерованную с учетом кратности, обозначаем через $\operatorname{Zero}_f$. Последовательность $\Lambda$ — **последовательность нулей** для подкласса $H \subset \operatorname{Hol}(\Omega)$, если найдется функция $f \in H$ такая, что $\Lambda = \operatorname{Zero}_f$, т.е. $n_\Lambda = n_{\operatorname{Zero}_f}$. Функция $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ *обращается в нуль на* $\Lambda$, если $\Lambda \subset \operatorname{Zero}_f$, т.е. $n_\Lambda \leqslant n_{\operatorname{Zero}_f}$. Последовательность $\Lambda$ — **<u>под</u>последовательность нулей** для подкласса $H \subset \operatorname{Hol}(\Omega)$, если существует ненулевая функция $f \in H$, обращающаяся в нуль на $\Lambda$. Если класс функций $H$ замкнут относительно вычитания, то подпоследовательность нулей для $H$ называем и *последовательностью неединственности*, а последовательность $\Lambda \subset \Omega$, не являющуюся подпоследовательностью нулей для $H$, называем также *последовательностью единственности* для $H$.

Пусть $\sigma > 0$. Основной рассматриваемый модельный подкласс $H$ — это пространство Бернштейна $B_\sigma^\infty$ (см. [2]) всех целых функций $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C})$ экспоненциального типа не больше $\sigma$, т.е. $\limsup_{z\to\infty} \bigl(\log\bigl|f(z)\bigr|\bigr)/|z| \leqslant \sigma$, и при этом ограниченных на вещественной оси, т.е. $\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|f(x)\bigr| < +\infty$.

Иначе [2] пространство Бернштейна $B^\infty_\sigma$ можно определить как класс всех целых функций, удовлетворяющих ограничению

$$\log|f(z)| \leqslant \sigma|\operatorname{Im} z| + c_f, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.4}$$

где $c_f$ — постоянная.

**1.2. Некоторые классические и известные результаты.** В силу известной взаимосвязи между полнотой систем экспонент вида (1.3) в пространствах функций на интервале $I_d$ или отрезке $\overline{I}_d$ и последовательностями единственности в пространстве Бернштейна $B^\infty_{d/2}$ ряд результатов будет сформулирован в форме условий (не)полноты системы экспонент. Прежде всего отметим, что значительное число теорем в такой форме доказано или приведено в [1–9]. Приведем или обсудим некоторые из них.

**Теорема Картрайт.** *Пусть для последовательности из* (1.1) *при некотором* $t \in \mathbb{R}$ *ряд*

$$\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k \neq 0} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\lambda_k}\right| \tag{1.5}$$

*расходится. Тогда* $\Lambda$ — *последовательность единственности для* $B^\infty_\sigma$ *при любом* $\sigma > 0$, *и система* $\operatorname{Exp}^\Lambda$ *полна в любом из пространств* $C(\overline{I}_d)$ *и* $L^p(I_d)$, *при любых конечных* $d > 0$ *и* $p \geqslant 1$. *При этом если ряд*

$$\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k \neq 0} \frac{1}{|\lambda_k|^2} \tag{1.6}$$

*сходится, то из сходимости ряда* (1.5) *при каком-либо значении* $t$ *следует его сходимость при любом* $t \in \mathbb{R}$.

**Замечание 1.** Расходимость ряда (1.6) и даже ряда $\sum_{\lambda_k \neq 0} 1/|\lambda_k|^\alpha$ при некотором $\alpha > 1$, а также бесконечность верхней плотности

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t)}{t} \tag{1.7}$$

или усредненной верхней плотности ($0 \notin \Lambda$)

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r}, \quad N_\Lambda(r) := \int_0^r \frac{n^{\mathrm{rad}}_\Lambda(t)}{t}\,dt = \sum_k \log^+ \frac{|\lambda_k|}{r}, \tag{1.8}$$

ведут к тем же последствиям, что и расходимость ряда (1.5) в теореме Картрайт [5, теорема 7].

**Замечание 2.** При сдвиге конечного числа точек последовательности $\Lambda$ последовательность (не)единственности остается таковой же для широкого класса пространств, включая $B^{\infty}_{\sigma}$, и (не)полнота систем экспонент $\mathrm{Exp}^{\Lambda}$ в рассматриваемых здесь пространствах функций устойчива относительно такого преобразования ([5], общий результат в [1, теорема 1.1.4]). Поэтому, когда необходимо, не умаляя общности, можем считать, что $0 \notin \Lambda$ для последовательности (1.1).

Слабым обратным утверждением к теореме Картрайт служит

**Теорема Шварца** (см. [4], [5, теорема 41]). *Если последовательность* (1.1) *удовлетворяет двум условиям*

$$0 < \alpha \leqslant |\arg \lambda_k| \leqslant \pi - \alpha, \ k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{\lambda_k \neq 0} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_k} \right| < +\infty \tag{1.9}$$

*или одному условию* $\sum_{\lambda_k \neq 0} 1/|\lambda_k| < +\infty$, *то* $\Lambda\ddot{E}$*— подпоследовательность нулей для пространств* $B^{\infty}_{\sigma}$ *при всех* $\sigma > 0$ *и система* $\mathrm{Exp}^{\Lambda}$ *неполна в пространствах* $C(\overline{I}_d)$ *и* $L^p(I_d)$ *при любом* $d > 0$.

Новые доказательства теорем Картрайт и Шварца будут приведены ниже для иллюстрации специфики рассматриваемого нами подхода.

Некоторым недостатком приведенных выше теорем является то, что они не „чувствуют“ удаления из $\Lambda$ или добавления к $\Lambda$ конечного число точек. В определенной степени этих недостатков лишены теоремы Левинсона [3]. Иллюстрирует их здесь только одна

**Теорема Левинсона.** *Пусть* $p \in [1, +\infty]$ *и для последовательности* (1.1) *характеристика*

$$\limsup_{r \to \infty} \Big( N_{\Lambda}(r) - \frac{d}{\pi} r + \frac{\log r}{p} \Big) \tag{1.10}$$

$= +\infty$ *при* $p = 1, +\infty$ *или* $\neq -\infty$ *при* $1 < p < +\infty$. *Тогда система* $\mathrm{Exp}^{\Lambda}$ *полна в* $L^p(I_d)$ *при* $p \in [1, +\infty)$ *и в* $C(\overline{I}_d)$ *при* $p = +\infty$. *В* (1.10) *заменить число* $p$ *на меньшее нельзя.*

Наиболее существенное продвижение по обобщению теоремы Левинсона осуществлено относительно недавно в совместной работе Н. Г. Макарова и А. Г. Полторацкого [10, п. 2.11]. В этой же работе доказываются общие критерии [10, п. 3.2, предложение, теорема, пример], полностью описывающие множества неединственности для широкого класса модельных пространств, обобщенные впоследствии А. Д. Барановым [12, теоремы 9.1.1 и 9.1.2]. Из них можно извлечь и критерий последовательностей неединственности для пространств Бернштейна. Мы не формулирем здесь этот результат по двум причинам. Во-первых, он требует определенной предварительной подготовки. Во-вторых, хотя как теоремы Макарова–Полторацкого–Баранова, так и наша основная теорема используют преобразование Гильберта, но в определенном смысле в противоположных направлениях. В теоремах Макарова–Полторацкого–Баранова требуется *построение* по последовательности $\Lambda$, конечно же исходя из рассматриваемого пространства, или же существование *специальных функций,* преобразование Гильберта одной из которых обладает определенными свойствами. При нашем же подходе необходима *проверка бесконечной серии равномерных интегральных оценок на специальном классе тестовых функций,* определяемых посредством преобразования Гильберта.

Одним из наиболее глубоких результатов по полноте систем экспонент и условиям на последовательности (не)единственности для пространств Бернштейна и по сей день остается

**Теорема Берлинга–Мальявена** ([5, теорема 77], интерпретация Редхеффера)**.** *Пусть в последовательности* (1.1) $\lambda_k \neq 0$. *Если существует число $c > 0$ и последовательность $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ попарно различных целых чисел, для которых ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{\lambda_k} - \frac{c}{2\pi n_k}\right|$ сходится, то $\Lambda$ — подпоследовательность нулей для $B^{\infty}_{d/2}$ и система $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ неполна в $C(\overline{I}_d)$ и $L^p(I_d)$, $p \geqslant 1$, для любого $d > c$. Обратно, если этот ряд расходится для любой последовательности $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ попарно различных целых чисел, то $\Lambda$ — последовательность единственности для $B^{\infty}_{d/2}$ и система $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ полна в $C(\overline{I}_d)$ и $L^p(I_d)$ для любого $d < c$.*

Каждое утверждение об устойчивости последовательности (не)единственности для пространства функций при достаточно малых ее изменениях, так же, как и об устойчивости (не)полноты систем экспонент при малых сдвигах показателей $\Lambda$ в (1.3), сразу дает достаточные условия для последовательностей (не)единственностей или (не)полноты систем экспонент, если в качестве изначальной сдвигаемой последовательности точек выбрана последовательность $\Lambda$, про которую требуемое свойство уже известно. Исходной точкой многих таких результатов является

**Теорема Редхеффера–Александера.** *Если для последовательностей*

$$\Lambda := \{\lambda_k\}, \quad \Gamma := \{\gamma_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.11}$$

*выполнено условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1+|\operatorname{Im}\lambda_k|+|\operatorname{Im}\gamma_k|} < \infty$, то системы $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ и $\operatorname{Exp}^{\Gamma}$ при любом $d > 0$ полны или неполны в каждом из пространств $C(\overline{I}_d)$ и $L^p(I_d)$, $1 \leqslant p < \infty$, одновременно.*

Относительно недавно А. Д. Барановым была получена

**Теорема Баранова** (см. [11, теорема 2.3], [12, теорема 9.2.1]). *Если для последовательностей* (1.11) *из верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$ *выполнено условие* $\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum\limits_k \frac{|\lambda_k-\gamma_k|}{|t-\lambda_k-i|} < \infty$, *то они могут быть последовательностями неединственности для* $B^\infty_\sigma$ *только одновременно.*

Теорема Баранова справедлива и для пространств Пэли–Винера $PW^p_\sigma$.

## §2. Основные результаты

**2.1. Критерий подпоследовательностей нулей для пространств Бернштейна.** Напомним, что для функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi\colon \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$, *прямое преобразование Гильберта* $\mathrm{H}$ определяется интегралом [13–15]

$$(\mathrm{H}\,\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} ⨍_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{x-t}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}_*,$$

где перечеркнутый интеграл обозначает главное значение интеграла в смысле Коши. Такая функция $\mathrm{H}\,\varphi$ определена почти всюду на $\mathbb{R}$. *Обратное преобразование Гильберта* отличается[1] только знаком

$$(\mathrm{H}^{-1}\,\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} ⨍_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt = -(\mathrm{H}\,\varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}_*. \tag{2.1}$$

**Классы $R\mathcal{P}^m_0$ основных, или тестовых, функций.** Всюду далее *рассматриваем только случай*

$$m \in \bigl(\mathbb{N} \setminus \{1\}\bigr) \cup \{\infty\}. \tag{2.2}$$

**Определение 1.** Класс основных, или тестовых, функций $R\mathcal{P}^m_0$ определяем как подкласс всех *положительных непрерывных функций*

$$\varphi\colon \mathbb{R}_* \to [0,+\infty), \quad \varphi \in C(\mathbb{R}_*), \tag{2.3c}$$

$$Z_\varphi := \bigl\{x \in \mathbb{R}_*\colon \varphi(x) = 0\bigr\}, \tag{2.3z}$$

$$E_\varphi \subset \mathbb{R}_* \text{ — полярное в } \mathbb{C} \text{ и замкнутое в } \mathbb{R}_* \text{ подмножество,} \tag{2.3p}$$

с сужением на $\mathbb{R} \setminus \bigl(\{0\} \cup Z_\varphi \cup E_\varphi\bigr) = \mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi)$ из класса

$$C^m\Bigl(\mathbb{R} \setminus \bigl(\{0\} \cup Z_\varphi \cup E_\varphi\bigr)\Bigr) = C^m\bigl(\mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi)\bigr),$$

для которых одновременно выполнены

[1] Иногда, особенно в технических приложениях, названия противоположны: обратное преобразование называется прямым, и наоборот.

- *условие финитности*

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad |x| \geqslant R_\varphi > 0, \tag{2.4}$$

где $R_\varphi > 0$ — постоянная, зависящая от $\varphi$;

- *условие полунормировки* в нуле

$$\limsup_{0 \neq x \to 0} \frac{\varphi(x)}{-\log|x|} \leqslant 1; \tag{2.5}$$

- *сопряженное условие положительности*

$$(-\mathrm{H}\,\varphi)'(x) = \frac{1}{\pi} \fint_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{(t-x)^2}\, dt \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi), \tag{2.6}$$

где неравенство после замены переменных можно записать в форме

$$(-\mathrm{H}\,\varphi)'(x) = \frac{1}{\pi} \fint_0^{+\infty} \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t) - 2\varphi(x)}{t^2}\, dt \geqslant 0, \tag{2.7}$$

а равенства в (2.6)–(2.7) следуют из последнего равенства в (4.7) в заключительной части предложения 2, доказанного ниже.

Из (2.1) и (2.6) сопряженные условия положительности (2.6)–(2.7) эквивалентны *возрастанию*[2] *обратного преобразования Гильберта* $\mathrm{H}^{-1}\,\varphi = -\mathrm{H}\,\varphi$ отдельно на каждом открытом интервале — связной компоненте дополнения $\mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi)$ замкнутого в $\mathbb{R}_*$ множества $Z_\varphi \cup E_\varphi$ до $\mathbb{R}_*$.

Тестовые функции класса $R\mathcal{P}_0^m$ обладают полезным в дальнейшем (см. §6) свойством — инвариантностью относительно гомотетии: *если $\varphi$ из класса $R\mathcal{P}_0^m$, то для любого $r \in \mathbb{R}_*$ функция*

$$\varphi(\cdot/r)\colon t \mapsto \varphi(t/r),\ t \in \mathbb{R}_*,\ \textit{также из класса } R\mathcal{P}_0^m. \tag{2.8}$$

Левые части в (2.6)–(2.7) можно заменить на прямое преобразование Гильберта производной $\varphi'$ за счет равенств $(-\mathrm{H}\,\varphi)' = -\mathrm{H}\,\varphi' = H^{-1}\varphi'$, если производная $\varphi'$ принадлежит некоторому $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$ [13, подраздел **4.8**], или если рассматривать производные и преобразование Гильберта в смысле теории распределений (обобщенных функций) [15, §3.3].

[2]Функция $f$ возрастает на $I \subset \mathbb{R}$, если из $x_1 \leqslant x_2$, $x_1, x_2 \in I$, следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

**Преобразование Пуассона.** Для $\lambda \in \mathbb{C}_\pm := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *интеграл Пуассона* $\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm} \varphi$ функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ определяется как

$$(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm} \varphi)(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{(t - \operatorname{Re} \lambda)^2 + (\operatorname{Im} \lambda)^2} \varphi(t)\, dt, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0. \tag{2.9}$$

Для $\lambda \in \mathbb{R}_*$ полагаем

$$(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm} \varphi)(\lambda) := \varphi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_*. \tag{2.10}$$

Интеграл Пуассона из (2.9) — гармоническая функция на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Определения (2.9) и (2.10) вместе определяют *преобразование Пуассона* $\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}$.

**Теорема 1** (о последовательностях единственности для пространства Бернштейна). *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ последовательность в $\mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$ и $\sigma \in (0, +\infty)$. Следующие три утверждения эквивалентны*:

1) $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — *последовательность единственности для пространства Бернштейна $B_\sigma^\infty$*;
2) *для некоторого (для любого) $m$ из (2.2) выполнено условие*

$$\sup_{\varphi \in R\mathcal{P}_0^m} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm} \varphi)(\lambda_k) - \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \right) = +\infty; \tag{2.11}$$

3) *условие (2.11) выполнено с заменой $R\mathcal{P}_0^m$ на операцию* $\sup$ *по более узкому классу гладких тестовых функций $R\mathcal{P}_0^\infty \cap C^\infty(\mathbb{R}_*)$.*

По замечанию 2 из подраздела 1.2 условие $0 \notin \Lambda$ не умаляет общности.

**Замечание 3.** Если $\Lambda \subset \mathbb{R}_*$ — вещественная последовательность, то (2.11) выглядит совсем просто:

$$\sup_{\varphi \in R\mathcal{P}_0^m} \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(\lambda) - \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \right) = +\infty. \tag{2.12}$$

**Замечание 4.** Как уже отмечалось в замечании 1 из подраздела 1.2, теорема 1 представляет интерес только в случае, когда при некотором $t \in \mathbb{R}$ сходится ряд (1.5) и последовательность $\Lambda$ — конечной верхней плотности. Заметим, что каждая последовательность $\Lambda$ конечной верхней плотности имеет показатель сходимости не более 1, что означает сходимость любого ряда $\sum_{\lambda_k \neq 0} 1/|\lambda_k|^\alpha$ при каждом $\alpha > 1$ и, в частности, сходимость ряда (1.6). В этом случае сходится ряд $\sum\limits_{\operatorname{Im} \lambda_k \neq 0} \left|\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_k}\right|$. Более того, ряд (1.5) сходится равномерно по $t \in [-r, r] \subset \mathbb{R}$ для каждого фиксированного числа $r > 0$. Действительно, пусть $t \in [-r, r]$ . Тогда для произвольных

$R' > R \geqslant 2r$ легко получается неравенство

$$\sum_{\substack{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0\\ R\leqslant|\lambda_k|\leqslant R'}} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\lambda_k}\right| \leqslant \sum_{\substack{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0\\ R\leqslant|\lambda_k|\leqslant R'}} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_k}\right| + \sum_{R\leqslant|\lambda_k|\leqslant R'} \frac{2r}{|\lambda_k|^2}, \tag{2.13}$$

где правая часть независимо от $t \in [-r, r]$ стремится к нулю при $R', R \to +\infty$. По признаку Коши требуемая равномерная сходимость доказана. Поскольку каждая тестовая функция финитна (с носителем на $[-R_\varphi, R_\varphi]$), в сумме $\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi)(\lambda_k)$ можно переставить местами знаки суммы и интеграла[3] (Пуассона). Следовательно, при сходимости рядов (1.5) (для некоторого $t$) и (1.6)

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi)(\lambda_k) = \int_{\mathbb{R}}\Biggl(\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0}\frac{1}{\pi}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\lambda_k}\right|\Biggr)\varphi(t)\,dt + \sum_{\operatorname{Im}\lambda_k=0}\varphi(\lambda_k)$$

и сумму в (2.11) можно заменить на правую часть последнего равенства.

**Замечание 5.** В условиях (2.11), (2.12) прослеживается прямая аналогия с определениями естественных отношений порядка на вещественнозначных мерах Радона или на распределениях (обобщенных функциях). Действительно, если $\nu$ и $\mu$ — две такие меры или распределения на $\mathbb{C}$, то $\nu \leqslant \mu$ по определению означает

$$\sup_{\varphi\in\left(C_0^\infty(\mathbb{C})\right)^+}\bigl(\nu(\varphi)-\mu(\varphi)\bigr) \leqslant 0, \tag{2.14}$$

где $(C_0^\infty(\mathbb{C}))^+$ — класс всех бесконечно дифференцируемых финитных положительных функций на $\mathbb{C}$.

С другой стороны, каждая последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ определяет считающую меру $n_\Lambda$ по правилу (1.2). Мера $\mu_\sigma$ с плотностью $d\mu_\sigma(x) := \dfrac{\sigma}{\pi}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$, на $\mathbb{R}$ — мера Рисса субгармонической функции $M_\sigma(z) := \sigma|\operatorname{Im} z|$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu_\sigma := \frac{1}{2\pi}\,\Delta M_\sigma \geqslant 0$, где $\Delta$ — оператор Лапласа, действующий в теории распределений Шварца. Функция $M_\sigma$ расположена в правой части неравенства (1.4) и определяет класс Бернштейна $B_\sigma^\infty$. В этих обозначениях (2.11) и (2.12) можно переписать в форме

$$\sup_{\varphi\in R\mathcal{P}_0^m}\bigl(n_\Lambda(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi)-\mu_\sigma(\varphi)\bigr) < +\infty.$$

Эту запись полезно сравнить с соотношением (2.14), аналогия с которым достаточно прозрачна, особенно в п. 3), где фигурируют бесконечно дифференцируемые финитные тестовые функции класса $R\mathcal{P}_0^\infty \cap C^\infty(\mathbb{R}_*)$.

[3] Возможность перестановки суммы и интеграла можно было бы обосновать и иначе, исходя из положительности членов ряда [16, гл. IV, §4, следствие 4].

**2.2. Критерии полноты систем экспонент в пространствах функций на отрезке с избытком 0 или 1.** В этом подразделе мы следуем терминологии и обозначениям, иногда несколько измененным, из [1]. Напомним некоторые определения. Система векторов из локально выпуклого пространства $E$ *полна*, если замыкание ее линейной оболочки совпадает с пространством. Система векторов *минимальна* в $E$, если ни один вектор этой системы не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных. Если система векторов одновременно полна и минимальна, то она называется *точной*. Пусть $\mathcal{E}_\Lambda$ — последовательность попарно различных векторов из $\mathcal{E} \subset E$, проиндексированное точками последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$. Говорим, что система $\mathcal{E}_\Lambda$ имеет *избыток* $\operatorname{exc} \mathcal{E}_\Lambda = q \in \mathbb{Z}$ в пространстве $E$ (относительно $\mathcal{E}$), если мы придем от системы $\mathcal{E}_\Lambda$ к точной в $E$ системе

- при $q \geqslant 0$ — после удаления $q$ векторов из системы $\mathcal{E}_\Lambda$;
- при $q < 0$ — после добавления $|q|$ новых векторов к $\mathcal{E}_\Lambda$ из $\mathcal{E}$.

Если полнота не нарушается (не возникает) после удаления (соответственно добавления) любого конечного набора различных векторов из $\mathcal{E}_\Lambda$ (соответственно из $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\Lambda$), то $\operatorname{exc} \mathcal{E}_\Lambda := +\infty$ (соответственно $\operatorname{exc} \mathcal{E}_\Lambda := -\infty$).

В дальнейшем, говоря об избытке системы экспонент $\operatorname{Exp}^\Lambda$ в функциональном пространстве, мы будем писать $\operatorname{exc} \Lambda$ вместо $\operatorname{exc} \operatorname{Exp}^\Lambda$. Определение избытка в рассматриваемых нами функциональных пространствах для кратных экспонент корректно, поскольку не зависит от удаляемых или добавляемых экспоненциальных функций (общие результаты по этому поводу можно найти в [1, теорема 1.1.4(3), п. 1.1.3]).

**Теорема 2** (о полноте экспоненциальных систем в пространствах на интервале). *Если для последовательности точек* $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$, *выполнено условие* (2.11) *или, при ограничении* $\Lambda \subset \mathbb{R}$, *условие* (2.12), *то система* $\operatorname{Exp}^\Lambda$ *полна в любом пространстве* $C(\overline{I}_{2\sigma})$ *и* $L^p(I_{2\sigma})$, $p \geqslant 1$. *Обратно, если левая часть в* (2.11) *или, при ограничении* $\Lambda \subset \mathbb{R}$, *в* (2.12) *конечна, то* (*относительно системы всех кратных экспонент*) $\operatorname{exc} \Lambda \leqslant 0$ *для* $C(\overline{I}_{2\sigma})$ *и для* $L^p(I_{2\sigma})$ *при* $p \geqslant 2$, *а также* $\operatorname{exc} \Lambda \leqslant 1$ *для* $L^p(I_{2\sigma})$ *при* $1 \leqslant p < 2$.

*При этом в условиях* (2.11) *или* (2.12) *тестовые классы* $R\mathcal{P}_0^m$ *можно в любой ситуации заменить на более узкий класс из* п. 3) *теоремы* 1.

**Замечание 6.** Теоремы 1, 2 были анонсированы в несколько видоизмененной и упрощенной формах в [1, теорема 2.1.12 и следствие 2.1.2] (издания третье, четвертое) и в кратком обзоре [17, теорема 4 и следствие 2]. Отметим также, что для получения из теоремы 1 различных достаточных условий для множеств единственности (см. ниже п. 6.1), равно как и условий полноты систем экспонент, полезно использовать как можно бо́льшее множество тестовых функций (импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) теоремы 1 и первая часть теоремы 2). И наоборот, для исследования достаточных условий для множеств неединственности или для условий неполноты экспоненциальных систем удобно максимально сузить класс тестовых функций, при которых теорема 1 (см. импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1)) или вторая часть теоремы 2 о полноте (см. последнее предложение в ней) справедливы. Таким образом, представлет интерес как расширение класса тестовых функций, так и его сужение. При этом задача сужения класса тестовых функций в этих теоремах намного сложнее и глубже, чем проблема расширения класса $R\mathcal{P}_0^2$. Мы предполагаем вернуться к этому в ином месте.

## §3. Описание последовательностей единственности для пространства Бернштейна в терминах потенциалов Йенсена

Нам потребуется ряд определений и сведений из статьи [18] и обзора [1]. Всюду далее символ $\Subset$ обозначает предкомпактное включение.

**Определение 2.** Субгармоническую в $\mathbb{C}_*$ функцию $V$ называем *потенциалом Йенсена*[4] (с полюсом в точке 0) если выполнены следующие три условия:

1) $V(\zeta) \geqslant 0$ *при* $\zeta \in \mathbb{C}_*$ (положительность);
2) *существует компакт* $K \Subset \mathbb{C}$, *для которого* $V \equiv 0$ *на* $\mathbb{C} \setminus K$ (финитность);
3) $\limsup\limits_{\zeta \to 0} \frac{V(\zeta)}{-\log|\zeta|} \leqslant 1$ (полунормировка в нуле).

Класс всех потенциалов Йенсена обозначаем через $\mathcal{P}_{J_0}$.

На самом деле условие полунормировки в нуле для потенциала Йенсена $V$ дает большее: *существует такое число* $R_V > 0$, *что*

$$V(\zeta) \leqslant \log^+ \frac{R_V}{|\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}_*$$

(см. [18, предложение 1.5]), *а если* $V(\infty) := 0$, *то* $V \in \operatorname{sbh}\big(\mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}\big)$.

Роль потенциалов Йенсена в доказательстве теоремы 1 определяется результатом из [18, теорема 2]. Пусть $M \in \operatorname{sbh}(\mathbb{C})$, $M \not\equiv -\infty$, и $\nu_M := \frac{1}{2\pi}\Delta M$ — мера Рисса функции $M$, где $\Delta$ — оператор Лапласа, действующий в смысле теории распределений (обобщенных функций).

[4]Ранее в [18, 1] и в других наших работах использовался термин „функция Йенсена“, но оказалось, что раньше он начал применяться в теории обобщенных аналитических функций (ссылки см. в [19]), с чем и связан наш переход к термину „потенциал Йенсена“.

Определим весовое пространство целых функций

$$\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; M) := \{f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp M} < +\infty\}.$$

**Теорема A** (см. [18, введение, теорема 2]). *Если найдется константа $C \in \mathbb{R}$, для которой функция $M \in \operatorname{sbh}(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{|z-\zeta|\leqslant 1} M(\zeta) \leqslant M(z) + C \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

*то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ — последовательность единственности для* $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; M)$;
2) *справедливо соотношение*

$$\sup_{V\in\mathcal{P}_{J_0}} \left( \sum_k V(\lambda_k) - \int V\, d\nu_M \right) = +\infty. \tag{3.2}$$

Давно известно [2], что пространство Бернштейна $B_\sigma^\infty$ совпадает с пространством $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; M)$ при $M(z) \equiv \sigma|\operatorname{Im} z|$, $z \in \mathbb{C}$, а такая субгармоническая функция $M$ с плотностью меры Рисса

$$d\nu_M(t) = \frac{\sigma}{\pi}\, dt, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

где $dt$ — плотность евклидовой меры на $\mathbb{R}$, очевидно, удовлетворяет условию (3.1) с постоянной $C = \sigma$.

Напомним, что меры Йенсена $\mu$ определяются как положительные меры с компактным носителем, удовлетворяющие условию

$$u(0) \leqslant \int u\, d\mu, \quad \forall\, u \in \operatorname{sbh}(\mathbb{C}).$$

Обозначаем этот класс мер как $J_0$. Класс всех потенциалов Йенсена $\mathcal{P}_{J_0}$ совпадает с классом функций [18, §4, предложение 4.1]

$$V_\mu(\zeta) := \int \log\Bigl|1 - \frac{z}{\zeta}\Bigr|\, d\mu(z) = \int \log|\zeta - z|\, d\mu(z) - \log|\zeta|, \quad \mu \in J_0. \tag{3.4}$$

По доказательству основной теоремы[5] из [18, §2, основная теорема] и согласно [18, §2, замечание 1] в этой основной теореме достаточно ограничиться гладкими (с плотностью класса $C^\infty(\mathbb{C})$) мерами Йенсена с носителями вне некоторого произвольного, но фиксированного круга $R\,\mathbb{D}$. Такие

[5] В доказательстве этой основной теоремы в п. 2a) были допущены описки. Для их исправления достаточно всюду в этом пункте заменить произведение $\varphi_\Lambda g_R$ на $\varphi_\Lambda \exp g_R$. Впрочем, это исправление было уже сделано в более позднем и более информативном утверждении [20, доказательство предложения 9.2, п. (a)]

меры порождают ввиду определения (3.4) гладкие в $\mathbb{C}_*$ и гармонические в $R\,\mathbb{D}_*$ потенциалы Йенсена [18, §4, пример 2]. Теорема A выводится из [18, §2, основная теорема] с помощью [18, §5, теорема 2], где меры Йенсена заменяются на потенциалы Йенсена. Таким образом, и в теореме A можно обойтись гладкими потенциалами Йенсена, гармоническими в $R\,\mathbb{D}_*$. Отсюда имеет место

**Замечание 7.** В теореме A в соотношении (3.2) часть $\sup_{V\in\mathcal{P}_{J_0}}$ можно ослабить, заменив ее на sup по всем бесконечно дифференцируемым потенциалам Йенсена $V \in \mathcal{P}_{J_0} \cap C^\infty(\mathbb{C}_*)$ с гармоническим сужением на $R\,\mathbb{D}_*$.

В специальном случае $\nu_1 = n_\Lambda$ и $d\nu_2 = \nu_M$, а $M(z) \equiv \sigma|\mathrm{Im}\, z|$, теорема A, с учетом (3.3) и замечания 7, может быть сформулирована как

**Теорема 3.** *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — *последовательность в* $\mathbb{C}$, $\sigma \in (0,+\infty)$. *Следующие три утверждения эквивалентны*:

1) *последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ — *последовательность единственности для пространства Бернштейна* $B^\infty_\sigma$;
2) *при некотором (при любом)* $R > 0$ *справедливо соотношение*
$$\sup\left\{\sum_k V(\lambda_k) - \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,dt \colon V \in \mathcal{P}_{J_0}\cap C^\infty(\mathbb{C}_*),\ V\Big|_{R\,\mathbb{D}_*} \in \mathrm{har}\,(R\,\mathbb{D}_*)\right\} = +\infty; \tag{3.5}$$
3) *выполнено условие*
$$\sup_{V\in\mathcal{P}_{J_0}}\left(\sum_k V(\lambda_k) - \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,dt\right) = +\infty. \tag{3.6}$$

## §4. Продолжение тестовых функций

Одну из основных ролей в этом параграфе будет играть

**Предложение 1.** *Пусть* $\mathcal{O}$ — *открытое подмножество в* $\mathbb{C}$, *а функция* $V\colon \mathcal{O}\to\mathbb{R}$ *непрерывна на* $\mathcal{O}$, $V \in \mathrm{har}\,(\mathcal{O}\setminus\mathbb{R})$ *и*
$$V \in C^1(\overline{\mathbb{C}}_+ \cap \mathcal{O}), \quad V \in C^1(\overline{\mathbb{C}}_- \cap \mathcal{O}).$$
*Функция* $V$ — *субгармоническая на* $\mathcal{O}$, *если и только если*
$$\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{n}^{\,\mathrm{in}}_+} + \frac{\partial V}{\partial \vec{n}^{\,\mathrm{in}}_-}\right)(x) := \lim_{0<y\to 0}\frac{V(x+iy)-V(x)}{y} + \lim_{0>y\to 0}\frac{V(x+iy)-V(x)}{-y} \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}\cap\mathcal{O}, \tag{4.1}$$

*где* $\frac{\partial}{\partial\vec{n}^{\,\mathrm{in}}_+}$ *и* $\frac{\partial}{\partial\vec{n}^{\,\mathrm{in}}_-}$ *— операторы дифференцирования по внутренней единичной нормали соответственно в* $\mathbb{C}_+\cap\mathcal{O}$ *и* $\mathbb{C}_-\cap\mathcal{O}$*. При этом плотность меры Рисса* $\nu_V$ *функции* $V\in\mathrm{sbh}\,(\mathcal{O})$ *с носителем* $\mathrm{supp}\,\nu_V\subset\mathbb{R}\cap\mathcal{O}$ *совпадает с левой частью неравенства* (4.1)*, деленной на* $2\pi$*.*

*Если дополнительно при условии* (4.1) *функция* $V$ *доопределена как положительная и непрерывная в некоторой открытой в* $\mathbb{C}$ *окрестности* $\mathcal{O}_0$ *объединения* $A_0:=Z_0\cup E_0$ *двух замкнутых множеств* $Z_0$ *и* $E_0$ *из дополнения* $\mathbb{R}\setminus\mathcal{O}$ *до* $\mathbb{R}$*, субгармонична на* $\mathcal{O}_0\setminus A_0$ *и* $V(x)\equiv 0$ *при* $x\in Z_0$*, а* $E_0$ *— полярное множество в* $\mathbb{C}$*, то функция* $V$ *субгармоническая в открытой окрестности* $\mathcal{O}\cup\mathcal{O}_0$ *подмножества* $(\mathbb{R}\cap\mathcal{O})\cup A_0\subset\mathbb{R}$*.*

**Доказательство.** Нетривиален только случай $\mathbb{R}\cap\mathcal{O}\neq\varnothing$.

**Лемма А.** *Пусть* $D$ *— область в* $\mathbb{C}$ *и пусть* $S$ *— кривая класса* $C^1$*, которая разбивает* $D$ *на две подобласти* $D_1$ *и* $D_2$*.*

*Пусть* $V\in C_{\mathbb{R}}(D)\cap C^2(D_1\cup D_2)$ *и* $V\in\mathrm{sbh}\,(D_k)$*,* $k=1,2$*. Если*

$$V\,\Big|_{D_k\cup S}=: V_k\in C^1(D_k\cup S),\quad k=1,2,$$

*то функция субгармонична в* $D$ *тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial V_1}{\partial\vec{n}^{\,\mathrm{in}}_1}+\frac{\partial V_2}{\partial\vec{n}^{\,\mathrm{in}}_2}\geqslant 0 \tag{4.2}$$

*на* $S$*, где* $\frac{\partial}{\partial\vec{n}^{\,\mathrm{in}}_k}$ *— операторы дифференцирования по внутренней единичной нормали в* $D_k\cup S$*,* $k=1,2$*.*

Для доказательства критерия субгармоничности функции $V$ на $\mathcal{O}$ достаточно напрямую воспользоваться леммой А, которая после [21, лемма 3.8.1] была независимо передоказана П. Бланше [22, теорема 3.1] (см. также [23, лемма 4.1]). Для этого надо выбрать $D:=\mathcal{O}$, $D_1:=\mathcal{O}\cap\mathbb{C}_+$, $D_2:=\mathcal{O}\cap\mathbb{C}_-$, $S:=\mathbb{R}\cap\mathcal{O}$ и переписать (4.2) в более явном виде (4.1).

Опишем меру Рисса функции $V\in\mathrm{sbh}\,(\mathcal{O})$. Рассмотрим в качестве области $D$ теперь уже произвольный круг $x_0+r\mathbb{D}\Subset\mathcal{O}$, $(x_0-r,x_0+r)\Subset\mathcal{O}\cap\mathbb{R}$ — открытый интервал,

$$D_+:=(x_0+r\mathbb{D})\cap\mathbb{C}_+,\quad D_-:=(x_0+r\mathbb{D})\cap\mathbb{C}_- \tag{4.3}$$

— верхний и нижний открытые полукруги в $\mathcal{O}$.

Применяя вторую формулу Грина дважды в каждом полукруге $D_\pm$ к финитной в $D$ основной положительной функции $\psi\in\bigl(C_0^\infty(D)\bigr)^+$ и к функции $V$, гармонической в $D_\pm$, после сложения двух формул получаем

$$\int_D V\Delta\psi=\int_{x_0-r}^{x_0+r}\psi(x)\left(\frac{\partial V}{\partial\vec{n}^{\,\mathrm{in}}_+}+\frac{\partial V}{\partial\vec{n}^{\,\mathrm{in}}_-}\right)(x)\,dx,$$

где правая часть положительна ввиду условия (4.1). По теории распределений это означает, что после деления на $2\pi$, (4.1) дает меру Рисса $\nu_V$ для субгармонической в $\mathcal{O}$ функции $V$.

При положительности и непрерывности функции $V$ на $\mathcal{O}_0$ и субгармоничности ее на открытом множестве $\mathcal{O}_0 \setminus A_0$ в каждой точке $x_0 \in Z_0$ имеем выполненным неравенство о среднем

$$0 = V(x_0) \leqslant \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} V(x_0 + te^{i\theta})\, d\theta, \quad x_0 + t\mathbb{D} \Subset \mathcal{O}_0.$$

Отсюда функция $V$ субгармонична в открытой окрестности $\mathcal{O} \cup (\mathcal{O}_0 \setminus E_0)$ полярного множества $E_0$ и локально ограничена сверху на $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_0 \supset E_0$. По теореме об устранимых особенностях субгармонических функций [24, теорема 3.6.1] существует единственное субгармоническое продолжение сужения на $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_0 \supset E_0$ функции $V$ на все $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_0$, построенное по правилу

$$\limsup_{\substack{z \to x,\\ z \in \mathcal{O}_0 \setminus E_0}} V(z), \quad x \in E_0.$$

Ввиду непрерывности $V$ на $\mathcal{O}_0$ последний верхний предел совпадает с $V(x)$, $x \in E_0$, что завершает доказательство предложения 1. $\square$

**4.1. Продолжение тестовых функций на $\mathbb{C}_*$.** Пусть $m \geqslant 2$. По тестовой функции $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$ построим функцию на $\mathbb{C}_*$ (см. (2.9)–(2.10))

$$V^\varphi(\zeta) := \bigl(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm} \varphi\bigr)(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}_*. \tag{4.4}$$

**Предложение 2.** *Функция $V^\varphi$ — положительная субгармоническая в проколотой плоскости $\mathbb{C}_*$, ее сужение $V^\varphi \Big|_{\mathbb{R}_*}$ совпадает с функцией $\varphi$, функция $V^\varphi$ удовлетворяет условию полунормировки в нуле*

$$\limsup_{\substack{\zeta \to 0,\\ \zeta \in \mathbb{C}_*}} \frac{V^\varphi(\zeta)}{-\log|\zeta|} \leqslant 1, \tag{4.5}$$

*и для постоянной $R_\varphi$ из условия финитности* (2.4) *имеем оценку*

$$V^\varphi(\zeta) \leqslant \mathrm{const.} \left|\mathrm{Im}\, \frac{1}{\zeta}\right|, \quad |\zeta| \geqslant 2R_\varphi. \tag{4.6}$$

*Кроме того, справедливы соотношения*

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial V^{\varphi}}{\partial \vec{n}^{\,\mathrm{in}}_{+}}+\frac{\partial V^{\varphi}}{\partial \vec{n}^{\,\mathrm{in}}_{-}}\right)(x)\\
&\quad:=\lim_{0<y\to 0}\frac{V^{\varphi}(x+iy)-V^{\varphi}(x)}{y}+\lim_{0>y\to 0}\frac{V^{\varphi}(x+iy)-V^{\varphi}(x)}{-y}\\
&\quad=2\lim_{0<y\to 0}\frac{V^{\varphi}(x+iy)-\varphi(x)}{y}\\
&\quad=\frac{1}{\pi}\fint_{\mathbb{R}_*}\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{(t-x)^2}\,dt=(-\mathrm{H}\,\varphi)'(x)\geqslant 0,\\
&\qquad x\in\mathbb{R}_*\setminus\bigl(E_{\varphi}\cup\partial_{\mathbb{R}}Z_{\varphi}\bigr),
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

*где* $Z_{\varphi}$ *и* $E_{\varphi}$ *— множества из* (2.3z)–(2.3p)*, левая часть — плотность сужения на* $\mathbb{R}_*\setminus(E_{\varphi}\cup\partial_{\mathbb{R}}Z_{\varphi})$ *меры Рисса функции* $V^{\varphi}\in\operatorname{sbh}(\mathbb{C}_*)$*.*

**Доказательство.** Из положительности функции $\varphi$ следует положительность $V^{\varphi}$ всюду вне нуля. Функция $V^{\varphi}$ непрерывна в точках непрерывности функции $\varphi$ и

$$
\lim_{\substack{\zeta\to x_0,\\ \zeta\in\mathbb{C}_*}} V^{\varphi}(\zeta)=\varphi(x_0),\quad x_0\in\mathbb{R}_*,
\tag{4.8}
$$

по известным свойствам интеграла Пуассона (см., например, [25, гл. I, лемма 3.3]), а также бесконечно дифференцируема в $\mathbb{C}_{\pm}$ как гармоническая в $\mathbb{C}_{\pm}$. Нам потребуется следующая лемма, формулируемая здесь только для плоскости $\mathbb{C}$.

**Лемма B** (см. [26, гл. I, §8, теорема])**.** *Пусть в окрестности точки* $z_0\in\mathbb{C}$ *задана дважды непрерывно дифференцируемая кривая* $\Sigma$ *и с одной стороны от* $\Sigma$ *в окрестности* $z_0$ *(т. е. в некоторой компоненте множества* $(z_0+r\mathbb{D})\cap(\mathbb{C}\setminus\Sigma)$ *при достаточно малом* $r$*) задана гармоническая функция* $V$*, имеющая в каждой точке* $z\in\partial\bigl((z_0+r\mathbb{D})\cap\Sigma\bigr)$ *предел* $\lim_{\zeta\to z}V(\zeta)=\psi(z)$*, и* $\psi\in C^2(\Sigma)$*. Тогда градиент* $\operatorname{grad}V$ *имеет конечный предел в каждой точке границы* $\partial\bigl((z_0+r\mathbb{D})\cap\Sigma\bigr)$ *и может быть непрерывно продолжен на* $(z_0+r\mathbb{D})\cap\Sigma$*.*

Пусть $x_0\in\mathbb{R}_*\setminus(E_{\varphi}\cup\partial_{\mathbb{R}}Z_{\varphi})$ в обозначениях (2.3) определения 1. Выберем число $r>0$ столь малым, что

$$
\Sigma:=(x_0-r,x_0+r)\subset\mathbb{R}_*\setminus\bigl(E_{\varphi}\cup\partial_{\mathbb{R}}Z_{\varphi}\bigr).
$$

По лемме B в обозначениях (4.3) соответствующие сужения функции $V$ принадлежат классам

$$
C^1\bigl(\overline{D}_+\setminus\{x_0-r,x_0+r\}\bigr),\quad C^1\bigl(\overline{D}_+\setminus\{x_0-r,x_0+r\}\bigr),
\tag{4.9}
$$

где $\overline{D}_+, \overline{D}_-$ — замыкания $D_+, D_-$ в $\mathbb{C}$.

В силу произвольности выбора точки $x_0 \in \mathbb{R}_* \setminus (E_\varphi \cup \partial_{\mathbb{R}} Z_\varphi)$ функция $V := V^\varphi$ удовлетворяет условиям предложения 1 при $\mathcal{O} := \mathbb{C}_* \setminus (E_\varphi \cup \partial_{\mathbb{R}} Z_\varphi)$. Для доказательства субгармоничности функции $V = V^\varphi$ в $\mathbb{C}_* \setminus (E_\varphi \cup \partial_{\mathbb{R}} Z_\varphi)$ достаточно проверить условие (4.1).

Функция $V^\varphi(x+iy)$, $\zeta = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, четная по $y$ при каждом фиксированном $x$ по построению (4.4), (2.9)–(2.10). Следовательно, сумма производных по внутренним нормалям от $V$ из (4.1) для любых точек $x \in \mathbb{R}_* \setminus (E_\varphi \cup \partial_{\mathbb{R}} Z_\varphi)$ в данном случае совпадает с удвоенным пределом

$$
\begin{aligned}
2 \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{1}{y}\Bigl(V^\varphi(x+iy) - \varphi(x)\Bigr) \\
&= 2 \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{1}{y} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}\, \varphi(t)\, dt - \varphi(x) \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt = \frac{2}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{(t-x)^2}\, dt.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Ввиду сопряженного условия положительности (2.6) правая часть в (4.10) положительна при любом $x$. Следовательно, выполнено условие (4.1) предложения 1 и функция $V^\varphi$ субгармонична в $\mathbb{C}_* \setminus (E_\varphi \cup \partial_{\mathbb{R}} Z_\varphi)$. Выбирая в качестве множества $A_0 := E_\varphi \cup \partial_{\mathbb{R}} Z_\varphi$, $E_0 := E_\varphi$, $Z_0 := \partial_{\mathbb{R}} Z_\varphi$, по заключительной части предложения 1 функция $V^\varphi$ субгармонична в открытом множестве $\mathcal{O}_0 := \mathbb{C}_* \supset A_0$. Таким образом, $V^\varphi \in \operatorname{sbh}(\mathbb{C}_*)$. Попутно равенства (4.10) доказывают, что выполнены условие (4.1), а значит, и соотношения (4.7), но пока без $(-\mathrm{H}\,\varphi)'$.

Перейдем к доказательству условия полунормировки 3) определения 2. Из условия полунормировки в нуле (2.5) следует, что для *произвольного* $\varepsilon > 0$ при $\alpha \in (0, 1]$, зависящем от $\varepsilon$ и $\varphi$, справедливо неравенство

$$
\varphi(x) \leqslant (1+\varepsilon) \log \frac{1}{|x|}, \quad |x| \leqslant \alpha. \tag{4.11}
$$

Кроме того, в силу условия финитности (2.4), где можно считать, что $R_\varphi \geqslant 1$, найдется постоянная $C_1 \geqslant 0$, с которой выполнена оценка

$$
\varphi(x) \leqslant C_1, \quad |x| \geqslant \alpha. \tag{4.12}
$$

Оценки (4.11) и (4.12) с учетом условия финитности можно, несколько огрубляя, объединить в одну:

$$
\varphi(x) \leqslant (1+\varepsilon) \log^+ \frac{e^{C_1} R_\varphi}{|x|} =: (1+\varepsilon) \log^+ \frac{C}{|x|}, \; C := e^{C_1} R_\varphi, \; x \in \mathbb{R}_*. \tag{4.13}
$$

Из положительности ядра Пуассона в (2.9) и последней оценки следует

$$V^{\varphi}(\zeta)=(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_{\pm}}\varphi)(\zeta)\leqslant(1+\varepsilon)\Bigl(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_{\pm}}\log^{+}\frac{C}{|\cdot|}\Bigr)(\zeta),\quad \zeta\in\mathbb{C}_{*}. \tag{4.14}$$

Нетрудно проверить, что для постоянной $C_2$, зависящей только от $C$,

$$\Bigl(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_{\pm}}\log^{+}\frac{C}{|\cdot|}\Bigr)(\zeta)\leqslant\log\frac{1}{|\zeta|}+C_2,\quad \zeta\in\mathbb{D}_{*}.$$

Отсюда согласно (4.14) получаем

$$V^{\varphi}(\zeta):=(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_{\pm}}\varphi)(\zeta)\leqslant\log\frac{1}{|\zeta|}+C_2,\quad \zeta\in\mathbb{D}_{*}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{\substack{\zeta\to 0,\\ \zeta\in\mathbb{C}_{*}}}\frac{V^{\varphi}(\zeta)}{-\log|\zeta|}\leqslant 1+\varepsilon,$$

и ввиду произвола в выборе $\varepsilon>0$ получаем условие полунормировки (4.5).

Перейдем к доказательству оценки (4.6). При $\zeta=x+iy$, $|\zeta|=r\geqslant 2R_{\varphi}$ рассмотрим отдельно случаи $|x|\geqslant y$ и $y>|x|$. Достаточно ограничиться доказательством для замкнутой верхней полуплоскости, т.е. $y\geqslant 0$. При $|x|\geqslant y$ для $|t|\leqslant R_{\varphi}$ имеем

$$(t-x)^2\geqslant\bigl(|x|-|t|\bigr)^2\geqslant\bigl(r/\sqrt{2}-R_{\varphi}\bigr)^2\geqslant\bigl(r/\sqrt{2}-r/2\bigr)^2=\Bigl(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\Bigr)^2 r^2.$$

Отсюда при $|x|\geqslant y$ и $r\geqslant 2R_{\varphi}$

$$V^{\varphi}(\zeta)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-R_{\varphi}}^{R_{\varphi}}\varphi(t)\frac{y}{(t-x)^2}\,dt\leqslant\text{const.}\int_{-R_{\varphi}}^{R_{\varphi}}\varphi(t)\,dt\cdot\frac{y}{r^2}\leqslant\text{const.}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{\zeta}\Bigr|.$$

При $|x|<y$ и $r\geqslant 2R_{\varphi}$ аналогично получаем

$$V^{\varphi}(\zeta)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-R_{\varphi}}^{R_{\varphi}}\varphi(t)\frac{y}{y^2}\,dt\leqslant\text{const.}\int_{-R_{\varphi}}^{R_{\varphi}}\varphi(t)\,dt\cdot\frac{2y}{r^2}\leqslant\text{const.}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{\zeta}\Bigr|.$$

Оценка (4.6) доказана.

Наконец, для доказательства последнего равенства в (4.7) действуем аналогично [27, Ch. XI, §E, 2, Remark]. Рассмотрим голоморфные в верхней полуплоскости функции

$$(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_{\pm}}\varphi)(z),\quad (H\varphi)(z):=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\frac{\operatorname{Re}z-t}{|z-t|^2}+\frac{t}{t^2+1}\Bigr)\varphi(t)\,dt,\quad z\in\mathbb{C}_{+},$$

— обе гармонические в $\mathbb{C}_+$, имеющие вторые непрерывные частные производные, возможно, вне исключительного множества $E_\varphi \cup \partial_{\mathbb{R}} Z_\varphi$. Тогда по условию Коши–Римана

$$(H\varphi)'(x) = \lim_{y\to 0+} \frac{\partial(H\varphi)(x+iy)}{\partial x}$$
$$= -\lim_{x\to 0+} \frac{\partial(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi)(x+iy)}{\partial y} = \lim_{y\to 0+} \frac{\varphi(x) - (\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi)(x+iy)}{y},$$

где последний предел может быть записан и в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{t^2}\, dt.$$

Последнее в сочетании с отмечавшимися во введении совпадениями условий (2.6) и (2.7) дает равенство из (2.6) и последнее равенство в (4.7). $\square$

**4.2. Сужение потенциалов Йенсена на $\mathbb{R}_* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$.** В определенной степени обратным к предложению 2 является

**Предложение 3.** *Если $V$ — потенциал Йенсена, непрерывный на $\mathbb{R}_*$, и его сужение $\varphi := V\Big|_{\mathbb{R}_*}$ из класса $C^m\bigl(\mathbb{R}_* \setminus (Z_V \cup E_V)\bigr)$ при некотором $m \in \bigl(\mathbb{N}\backslash\{1\}\bigr)\cup\{\infty\}$, где $Z_V := \{x \in \mathbb{R}_* \colon V(x) = 0\}$ и $E_V \subset \mathbb{R}_*$ — некоторое замкнутое полярное множество в $\mathbb{C}$, то $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$ и*

$$V^\varphi(\zeta) := \bigl(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi\bigr)(\zeta) \geqslant V(\zeta), \quad \zeta \neq 0. \tag{4.15}$$

**Доказательство.** Условия положительности, финитности (2.4) и полунормировки в нуле (2.5) из определения классов $R\mathcal{P}_0^m$ выполнены по определению 2 потенциалов Йенсена. Функция $V^\varphi$ непрерывна на $\mathbb{C}_*$ (см. [25, гл. I, лемма 3.3]) и гармоническая в $\mathbb{C}_\pm$. Так как потенциал Йенсена $V$ субгармоничен в $\mathbb{C}_*$, а его сужение на $\mathbb{R}_*$ совпадает с граничными значениями функции $V^\varphi$ на $\mathbb{R}_*$, то $V^\varphi$ мажорирует $V$ на $\mathbb{C}_*$, т.е. выполнено (4.15). Для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}_*$ среднее по кругу $x_0 + r\mathbb{D}$, $r < |x_0|$, от функции $V^\varphi$ не меньше среднего по тому же кругу от потенциала $V$, что в силу субгармоничности потенциала Йенсена $V$ больше или равно $\varphi(x_0) = V^\varphi(x_0)$. Следовательно, функция $V^\varphi$ субгармоническая в $\mathbb{C}_*$. Теперь можно проверить условие возрастания обратного преобразования Гильберта $-H\varphi$ отдельно на каждом открытом интервале, являющемся связной компонентой дополнения $\mathbb{R}_* \setminus (Z_\varphi \cup E_\varphi)$ объединения замкнутых множества $Z_\varphi := Z_V$ и $E_\varphi := E_V$ до $\mathbb{R}_*$ в форме сопряженного условия положительности (2.6). Для этого используем теорию распределений (обобщенных функций).

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}_* \setminus (E_\varphi \cup Z_\varphi)$. Выберем число $r > 0$ столь малым, что

$$\Sigma := (x_0 - r, x_0 + r) \subset \mathbb{R}_* \setminus (E_\varphi \cup Z_\varphi). \tag{4.16}$$

По лемме B в обозначениях (4.3) соответствующие сужения функции $V^\varphi$ принадлежат классам (4.9), а на $D_+$ и $D_-$ даже бесконечно дифференцируемы как гармонические.

Пусть $\psi_0 \in C_0^\infty(x_0 - r, x_0 + r) := C_0^\infty\big((x_0 - r, x_0 + r)\big)$ — *положительная* функция. Выпишем вторую формулу Грина в этих полукругах для положительного продолжения $\psi \in C_0^\infty(x_0 + r\mathbb{D})$ функции $\psi_0 = \psi\,\big|_{(x_0-r,x_0+r)}$ и функции $V^\varphi$:

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} \left( V^\varphi(t) \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_+^{\,\mathrm{in}}}(t) - \psi(t) \frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_+^{\,\mathrm{in}}}(t) \right) dt = \iint\limits_{D_+} (\psi \Delta V^\varphi - V^\varphi \Delta \psi)\, dx\, dy, \tag{4.17+}$$

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} \left( V^\varphi(t) \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_-^{\,\mathrm{in}}}(t) - \psi(t) \frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_-^{\,\mathrm{in}}}(t) \right) dt = \iint\limits_{D_-} (\psi \Delta V^\varphi - V^\varphi \Delta \psi)\, dx\, dy, \tag{4.17–}$$

В силу гладкости функции $\psi$ и противоположной направленности нормалей $\vec{n}_+^{\,\mathrm{in}}$ и $\vec{n}_-^{\,\mathrm{in}}$ справедливо тождество

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_+^{\,\mathrm{in}}}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_-^{\,\mathrm{in}}}(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}_+^{\,\mathrm{in}}}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial (-\vec{n}_+^{\,\mathrm{in}})}(t) \equiv 0, \quad t \in (x_0 + r, x_0 + r). \tag{4.18}$$

Гармоничность функции $V^\varphi$ в $\mathbb{C}_\pm$ влечет за собой тождество $\Delta V^\varphi(\zeta) \equiv 0$ на $D_+ \cup D_-$. Последнее вместе с (4.18) после сложения (4.17+) с (4.17–) дает равенство

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} \psi_0(t) \left( \frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_+^{\,\mathrm{in}}}(t) + \frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_-^{\,\mathrm{in}}}(t) \right) dt = \iint\limits_{x_0 + r\mathbb{D}} V^\varphi \Delta \psi\, dx\, dy, \tag{4.19}$$

где правая часть положительна ввиду субгармоничности функции $V^\varphi$ в $x_0 + r\mathbb{D}$ при подходе с точки зрения теории распределений. Таким образом, из (4.19) следует

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_+^{\,\mathrm{in}}}(t) + \frac{\partial V^\varphi}{\partial \vec{n}_-^{\,\mathrm{in}}}(t) \geqslant 0, \quad t \in \mathbb{R}_* \setminus (E_\varphi \cup Z_\varphi), \tag{4.20}$$

в силу произвольности выбора $x_0 \in \mathbb{R}_*$, $r$ из (4.16) и положительной функции $\psi_0 \in C_0^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$. Но сумма производных по нормали из (4.20) уже вычислена в (4.10) и равна главному значению интеграла в смысле

Коши из (2.6). Таким образом, выполнено сопряженное условие положительности (2.6), а функция $\varphi$ принадлежит тестовому классу $R\mathcal{P}_0^m$. $\square$

**Примеры.** Предложение 3 поставляет простейшие примеры тестовых функций класса $R\mathcal{P}_0^\infty$ на основе сужения на $\mathbb{R}_*$ известных потенциалов Йенсена или функций Грина для областей $D \ni 0$ с полюсом в нуле, поскольку такие функции Грина — частные случаи потенциалов Йенсена. Вот некоторые из них [18, пример 1] (как обычно, $f^+ = \max\{0, f\}$):

1) $\varphi(t) := \log^+ \dfrac{R}{|t|}$, $t \in \mathbb{R}_*$, — сужение потенциала Йенсена (продолженной функции Грина для круга $R\mathbb{D}$ с полюсом в нуле) $z \mapsto \log^+ \dfrac{R}{|z|}$, $z \in \mathbb{C}_*$ [1, §4, пример 1];
2) $\varphi(t) = \log^+ \frac{R}{|t|} - \frac{1}{2}\Bigl(1 - \frac{t^2}{R^2}\Bigr)^+$, $t \in \mathbb{R}_*$ [1, §4, пример 1];
3) сужение на $\mathbb{R}^*$ продолженной функции Грина ограниченной области $D$ с границей класса $C^1$ в $\mathbb{C}$, $0 \in D$, с полюсом в нуле [1, §4, пример 3].

Тестовые функции класса $R\mathcal{P}_0^\infty$ явного, но более сложного вида возникнут далее в теоремах единственности из §6.

## §5. Доказательства основных теорем

### 5.1. Доказательство теоремы 1 о последовательностях единственности для пространства Бернштейна.

**1. Доказательство импликаций** $1) \implies 2), 3)$**.** Допустим, что величины 2) в (2.11) или 3) из теоремы 1 конечны. Тогда те функции $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$, которые по предложению 3 сопоставляются в виде $\varphi\,\big|_{\mathbb{R}_*}$ всем потенциалам Йенсена $V$ с оценкой (4.15) таковы, что конечна величина (3.5) теоремы 3 из 2), поскольку выполнена оценка (4.15) для любой точки $\lambda_k$, а на вещественной оси функции $\varphi$ и $V$ совпадают по построению. Конечность точной верхней грани (3.5) по теореме 3 влечет за собой то, что $\Lambda$ — последовательность *неединственности* для пространства Бернштейна $B_\sigma^\infty$. Это доказывает импликации $1) \implies 2)$ и $1) \implies 3)$ теоремы 1.

**2. Доказательство импликаций** $2), 3) \implies 1)$ **теоремы 1.** Предположим теперь, что $\Lambda$ — последовательность *неединственности* для пространства Бернштейна $B_\sigma^\infty$. Тогда из эквивалентности $1) \iff 3)$ теоремы 3 найдется постоянная $C$, для которой при всех потенциалах Йенсена $V \in \mathcal{P}_{J_0}$ справедлива оценка

$$\sum V(\lambda_k) \leqslant \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,dt + C, \tag{5.1}$$

где постоянная $C$ *не зависит* от потенциалов Йенсена $V \in \mathcal{P}_{J_0}$.

Выберем теперь произвольную тестовую функцию $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$, а вместе с ней, как и в (4.4), рассмотрим преобразование Пуассона

$$V^{\varphi}(\zeta) := \bigl(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_{\pm}}\,\varphi\bigr)(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}_*. \tag{5.2}$$

По предложению 2 эта функция $V^{\varphi}$ обладает практически всеми свойствами потенциала Йенсена — субгармоничность и положительность вне нуля; полунормировка в нуле (4.5), сопряженное условие положительности (2.6)–(2.7). Исключением может быть лишь финитность (см. (4.6)), замененная более слабым условием (4.6):

$$V^{\varphi}(\zeta) \leqslant b\Bigl|\mathrm{Im}\,\frac{1}{\zeta}\Bigr|, \quad |\zeta| \geqslant r, \quad b, r \geqslant 0 \text{ — постоянные.}$$

Превратить такую функцию в потенциал Йенсена уже очень легко: достаточно рассматривать при каждом $\varepsilon > 0$ функцию вида

$$V_{\varepsilon}^{\varphi}(\zeta) := \bigl(V^{\varphi}(\zeta) - \varepsilon\bigr)^{+},$$

которая, сохраняя все прежние свойства, становится уже *финитной*, т. е. это полноценный непрерывный (вне нуля) потенциал Йенсена. Для таких потенциалов, как отмечалось выше в (5.1), справедливы неравенства

$$\sum_k V_{\varepsilon}^{\varphi}(\lambda_k) \leqslant \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V_{\varepsilon}^{\varphi}(t)\,dt + C = \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(t) - \varepsilon)^{+}\,dt + C, \tag{5.3}$$

где постоянная $C$ не зависит от потенциалов Йенсена $V_{\varepsilon}^{\varphi} \in \mathcal{P}_{J_0}$ и, в частности, от чисел $\varepsilon$. Устремляя здесь $\varepsilon > 0$ к нулю, ввиду равенства (5.2)

$$\sum_k (\mathrm{P}_{\mathbb{C}_{\pm}}\,\varphi)(\lambda_k) \leqslant \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt + C,$$

откуда получаем конечность точных верхних граней в 2), (2.11) и в 3). Это и доказывает импликации $2), 3) \Longrightarrow 1)$ теоремы 1.

### 5.2. Доказательство теоремы 2 о полноте экспоненциальных систем в пространствах на интервале.

**1. Условия полноты.** В силу широко известной взаимосвязи между последовательностью показателей полной системы экспонент в пространствах функций на интервале и последовательностями единственности в реализациях сопряженных к этим пространствам как пространств специальных целых функций экспоненциального типа (см. [2], [18, теорема 2.1.1]), если $\Lambda$ последовательность единственности для $B_{\sigma}^{\infty}$, то система полна в любом из пространств $C_{\mathbb{C}}(\overline{I}_{2\sigma})$ и $L^p(I_{2\sigma})$, $p \geqslant 1$, поскольку реализации сопряженных к этим пространствам как пространств целых функций все включаются в пространство Бернштейна $B_\sigma^\infty$.

**2. Неполнота и оценки на избытки полноты.** Пусть теперь точные верхние грани в (2.11) или, при ограничении $\Lambda \subset \mathbb{R}$, в (2.12) конечны. Тогда по теореме 1 последовательность $\Lambda$ — последовательность неединственности для пространства Бернштейна $B_\sigma^\infty$. Здесь мы вынуждены разбивать ситуацию на различные случаи.

**Случай пространств $C_{\mathbb{R}}(\overline{I}_{2\sigma})$ и $L^p(I_{2\sigma})$ при $p \geqslant 2$.** Обратно, пусть теперь точные верхние грани в (2.11) или при ограничении $\Lambda \subset \mathbb{R}$ в (2.12) ограничены сверху. Тогда $\Lambda$ — это последовательность неединственности для пространства Бернштейна $B_\sigma^\infty$, и найдется *ненулевая* целая функция $f$ с оценкой (1.4), ограниченная на вещественной оси и обращающаяся в нуль на $\Lambda$. Не умаляя общности, можем считать, что последовательность $\Lambda$ непуста и найдется некоторая точка $\lambda' \in \Lambda$.

Тогда ненулевая целая функция $F(z) := f(z)/(z-\lambda')$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ обращается в нуль на последовательности $\Lambda' := \Lambda \setminus \lambda'$ и в то же время принадлежит классу $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Отсюда по классической теореме Пэли–Винера найдется функция $g \in L^2(-\sigma,\sigma)$, с которой имеет место представление

$$F(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt} g(t)\, dt, \quad F(\Lambda') = 0. \tag{5.4}$$

В силу известной двойственности [18, теорема 2.1.1] это означает, что система $\operatorname{Exp}^{\Lambda'}$ неполна в $L^2(-\sigma,\sigma)$. Но из условия $g \in L^2(-\sigma,\sigma)$ (для $\sigma < \infty$) следует, что при любом $1 \leqslant q < 2$ по-прежнему $g \in L^q(-\sigma,\sigma)$ и, кроме того, $g$ — плотность борелевской меры. Ввиду той же двойственности система $\operatorname{Exp}^{\Lambda'}$ неполна в каждом из пространств $L^p(I_{2\sigma})$ при $p \geqslant 2, 1/p + 1/q = 1$, и $C_{\mathbb{R}}(\overline{I}_{2\sigma})$. Удаление одной экспоненты для достижения неполноты и означает в традиционных терминах избытков [18, 1.1.3], что $\operatorname{exc} \Lambda \leqslant 0$.

**Случай пространств $L^p(I_{2\sigma})$ при $1 \leqslant p < 2$.** Если для последовательности точек $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$, не выполнены условие (2.11) или, при ограничении $\Lambda \subset \mathbb{R}$, условие (2.12), то по теореме 1 последовательность $\Lambda$ — по-прежнему последовательность неединственности для пространства $B_\sigma^\infty$, и существует *ненулевая* целая функция $f$ с оценкой (1.4), ограниченная на вещественной оси и обращающаяся в нуль на $\Lambda$. Не умаляя общности, можем считать, что последовательность $\Lambda$ содержит по меньшей мере две, возможно, кратные точки $\lambda', \lambda'' \in \Lambda$, поскольку в противном случае система двух экспонент неполна в любом из рассматриваемых пространств.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(z) := \frac{f(z)}{(z-\lambda')(z-\lambda'')},$$

которая, очевидно, является ненулевой целой функцией экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, обращающаяся в нуль на $\Lambda'' := \Lambda \setminus \{\lambda', \lambda''\}$. При этом $F \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, и по теореме Хаусдорфа–Юнга найдется функция $g \in L^q(-\sigma, \sigma)$, $1/p + 1/q = 1$ (см. обобщение теоремы Пэли–Винера в [7, 1.7] или [8, 1.7]), для которой имеет место (ср. с (5.4)) представление

$$F(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt} g(t)\,dt, \quad F(\Lambda'') = 0.$$

В силу известной двойственности [18, теорема 2.1.1] это означает, что система $\operatorname{Exp}^{\Lambda''}$ неполна в $L^p(-\sigma, \sigma)$, где $p \leqslant 2$. Удаление двух экспонент для достижения неполноты и означает в традиционных терминах избытков [18, 1.1.3], что $\operatorname{exc} \Lambda \leqslant 1$.

При этом в условиях (2.11) или (2.12) тестовые классы $R\mathcal{P}_0^m$ можно в любой ситуации заменить на более узкие классы из п. 3) теоремы 1.

## §6. Некоторые начальные применения

Из наших теорем 1 и 2 можно получить значительное число результатов о последовательностях (не)единственности для пространств Бернштейна и о полноте экспоненциальных систем в пространствах $C(\overline{I}_d)$ и $L^p(I_d)$ (для примера, знаменитую теорему Берлинга–Мальявена о радиусе полноты, сформулированную в подразделе 1.2), но новое доказательство последней не короче и не проще нашего более раннего его доказательства (см. [28] и его изложение в [29, Ch. III]). Поэтому здесь мы ограничимся лишь простейшими следствиями теорем 1 и 2, подчеркивающими специфику нового подхода. Доказательства ряда других многочисленных известных результатов из монографий [5, 1, 7–9], их обобщений, а также, по возможности, новые факты предполагается изложить в дальнейшем.

**6.1. Теоремы единственности.** Наиболее легко применять теоремы 1 и 2 к получению достаточных условий для последовательностей единственности для пространств Бернштейна и условий полноты систем экспонент в пространствах $C(\overline{I}_d)$ и $L^p(I_d)$. Прежде всего отметим, что при доказательствах теорем 1 и 2, как и исходных для них теорем А и З (см. [1]), никаких условий, кроме отсутствия точек сгущения для последовательностей точек (показателей) и несущественного условия отсутствия нуля в них (замечание 2) не накладывается. Ниже покажем, что все достаточные условия для последовательностей единственности из теоремы

Картрайт из подраздела 1.2 и комментариев после нее содержатся в теореме 1. Все они содержатся в следующем простом следствии теорем 1 и 2.

**Следствие 1.** *Пусть* $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$ — *ненулевая функция,* $\sigma > 0$. *Если для последовательности* (1.1)

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(\sum_k (\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\,\varphi)\Big(\frac{\lambda_k}{r}\Big) - r\frac{\sigma}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx\right) = +\infty, \tag{6.1}$$

*то* $\Lambda$ — *последовательность единственности для* $B_\sigma^\infty$, *а система экспонент* $\mathrm{Exp}^\Lambda$ *полна в каждом из пространств* $C(\overline{I}_{2\sigma})$ *и* $L^p(I_{2\sigma})$, $p \geqslant 1$.

Доказательство этого следствия сразу следует из теорем 1 и 2, если воспользоваться инвариантностью функций класса $R\mathcal{P}_0^m$ относительно гомотетии, как отмечено после определения 1 в (2.8), и заменой переменных $x = t/r$ в интегралах Пуассона и в последнем интеграле.

**Примеры.** Применим следствие 1 к некоторым конкретным функциям $\varphi$ класса $R\mathcal{P}_0^m$.

**1.** Пусть $\varphi$ — функция из примера 1) подраздела 4.2 при $R = 1$, т.е. $\varphi(t) = \log^+\dfrac{1}{|t|}$. Тогда условие для последовательностей единственности (6.1) запишется в виде

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to+\infty}\Bigg(&\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Big|\operatorname{Im}\frac{1}{x-\lambda_k/r}\Big|\log\frac{1}{|x|}\,dx\\ &+\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k=0}\log^+\frac{|\lambda_k|}{r} - \frac{2\sigma}{\pi}r\Bigg) = +\infty.\end{aligned} \tag{6.2}$$

В частности, первая сумма здесь не меньше, чем

$$\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0}\log^+\frac{|\lambda_k|}{r}$$

(см. предложение 3, неравенство (4.15)). Таким образом, из (6.2) следует и более слабое условие для последовательности единственности

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(\sum_k \log^+\frac{|\lambda_k|}{r} - \frac{2\sigma}{\pi}r\right) \overset{(1.8)}{=} \limsup_{r\to+\infty}\Big(N_\Lambda(r) - \frac{2\sigma}{\pi}r\Big) = +\infty, \tag{6.3}$$

которое вполне согласуется с теоремой Левинсона из подраздела 1.2 при $p = +\infty$, но конечно, не доказывает ее в полном объеме для $p < +\infty$. Отсюда, в частности, следуют элементарные факты: для последовательности неединственности $\Lambda$ для $B_\sigma^\infty$ и для неполных систем $\mathrm{Exp}^\Lambda$

в $C(\overline{I}_d)$ и $L^p(I_d)$ последовательность $\Lambda$ должна быть конечной усредненной верхней плотности, а значит, и конечной верхней плотности, так как $n_\Lambda(t) \leqslant N_\Lambda(et)$ при всех $t > 0$, показатель ее сходимости $\leqslant 1$ и, тем более, сходится ряд (1.6).

В то же время условие (6.3) действительно слабее условия (6.2), поскольку теперь из него мы можем получить и теорему Картрайт из подраздела 1.2. Допустим, что $\Lambda$ — последовательность неединственности для некоторого $B^\infty_\sigma$. Тогда конечна и первая сумма в (6.2), например, при $r = 1$. Знаки суммы и интеграла в этом случае можно поменять местами, поскольку все слагаемые суммы и функция $\varphi$ положительны [16, гл. IV, §4, следствие 4]. Следовательно, ряд (1.5) сходится хотя бы при одном значении $t \in (-1, 1)$, а из сходимости ряда (1.6) следует сходимость ряда (1.5) при любом $t$ и теорема Картрайт доказана.

**2.** Пусть $\varphi$ — функция из примера 2) подраздела 4.2 при $R = 1$, т. е.

$$\varphi(t) = \log^+ \frac{1}{|t|} - \frac{1}{2}(1 - t^2)^+, \quad t \in \mathbb{R}_*.$$

Тогда условие (6.1) для последовательностей единственности запишется в виде

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to+\infty} \Biggl( \sum_{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{x-\lambda_k/r}\Bigr| \Bigl(\log\frac{1}{|x|} - \frac{1}{2}(1-x^2)\Bigr)\,dx \\ + \sum_{\operatorname{Im}\lambda_k=0} \biggl(\log^+\frac{r}{|\lambda_k|} - \frac{1}{2}\Bigl(1-\frac{|\lambda_k|^2}{r^2}\Bigr)^+\biggr) - \frac{4\sigma}{3\pi}\,r \Biggr) = +\infty.\end{aligned} \tag{6.4}$$

В частности, первая сумма здесь не меньше, чем

$$\sum_{\operatorname{Im}\lambda_k\neq 0} \biggl(\log^+\frac{r}{|\lambda_k|} - \frac{1}{2}\Bigl(1-\frac{|\lambda_k|^2}{r^2}\Bigr)^+\biggr)$$

(см. предложение 3, неравенство (4.15)). Таким образом, из (6.4) следует условие для последовательности единственности

$$\limsup_{r\to+\infty} \Biggl( \sum_{|\lambda_k|\leqslant r} \biggl(\log\frac{r}{|\lambda_k|} - \frac{1}{2}\Bigl(1-\frac{|\lambda_k|^2}{r^2}\Bigr)\biggr) - \frac{4\sigma}{3\pi}\,r \Biggr) = +\infty. \tag{6.5}$$

Представляя здесь сумму как интеграл Стильтьеса, после серии интегрирований по частям можно видеть, что условие (6.5) на последовательности неединственности совпадает с соотношением

$$\limsup_{r\to+\infty} \biggl( \frac{1}{r^2}\int_0^r N_\Lambda(t)t\,dt - \frac{4\sigma}{3\pi}\,r \biggr) = +\infty. \tag{6.6}$$

Легко показать, что если последнее условие выполнено, то имеет место и (6.3), т.е. по сравнению с (6.3) в (6.6) мы ничего нового не получаем. Но нам неясно, так ли это в отношении условия (6.4).

**3.** Приведем один ,,асимметричный" пример применения следствия 1.

Пусть $\zeta = te^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $k$ — $\gamma$-тригонометрически выпуклая (см.[6] [2]) непрерывная $2\pi$-периодическая положительная функция. Всюду в этом пункте считаем, что $\max k \leqslant 1$. Полагаем при $a > 1$ и $t > 1$

$$V_k(\zeta; a) = \frac{a^\gamma}{2\gamma(a^{2\gamma}+1)}\, k(\theta) \left(\left(\frac{a}{t}\right)^\gamma - \left(\frac{t}{a}\right)^\gamma\right)^+, \tag{6.7}$$

а при $0 < t < 1$

$$V_k(\zeta; a) = \frac{a^\gamma}{2\gamma(a^{2\gamma}+1)}\, k(\theta) \left((at)^\gamma - \left(\frac{1}{at}\right)^\gamma\right)^+ + \log^+ \frac{1}{t}. \tag{6.8}$$

В [18, §7] показано, что определенные таким образом функции являются непрерывными потенциалами Йенсена, гладкими вне точек $t = a$ и $t = 1$. Соотвественно их сужения на $\mathbb{R}_*$ по предложению 3 принадлежат классу тестовых функций $R\mathcal{P}_0^\infty$. Ограничимся здесь только простейшим примером функции

$$k(\theta) = \frac{1}{2}\,|1 + \cos\theta|, \quad V_k := V_k(\cdot; a). \tag{6.9}$$

В этом случае легко проверяется, что функция (6.9) является $\gamma$-тригонометрически выпуклой при любом значении $\gamma \geqslant 1/2$. Поскольку замена значений интеграла Пуассона в п. 2–3 теоремы 1 в точках $\lambda_k$ на сами потенциалы Йенсена в этих точках разве что уменьшит их (предложение 3, неравенство 4.15), то в данном случае в следствии 1 можно выбирать вместо интегралов Пуассона сами функции (6.7)–(6.8).

*Пусть $\gamma \geqslant 1/2$, и для простоты полагаем $\gamma < 1$. Если функция $k$ выбрана, как в (6.9), функция $V$, как в (6.7)–(6.8) и*

$$\limsup_{r\to+\infty} \Bigg( \sum_k V(\lambda_k/r; a) - r\,\frac{\sigma}{\pi} \left( (a - 1/a)\frac{2\gamma}{1-\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma}(a^\gamma - a^{-\gamma}) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1+\gamma}(a^{-\gamma} - a) + \frac{2\gamma(a^{2\gamma}+1)}{a^\gamma} \right) \Bigg) = +\infty,$$

*то $\Lambda$ — последовательность единственности для $B_\sigma^\infty$.*

Случаи $\gamma = 1$ и $\gamma > 1$ гораздо более деликатные, и мы их здесь не затрагиваем (ср. с. [18, §7, теорема единственности, п. 2)–3)]).

Приведем короткое доказательство теоремы Шварца из введения.

[6]Основное условие при этом $k'' + \gamma^2 k \geqslant 0$ в смысле теории распределений Шварца.

**Доказательство теоремы Шварца.** При условии (1.9), не умаляя общности, можем считать, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено ограничение

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_k}\Bigr| < \varepsilon \tag{6.10}$$

вместо второго условия из (1.9). Для этой цели достаточно сдвинуть конечное число точек из $\Lambda$, что не меняет свойство (не)полноты (см. замечание 2). Первая оценка из (1.9) влечет за собой оценку $|\operatorname{Im}\lambda_k| \geqslant |\lambda_k|\sin\alpha$. Эта оценка дает оценку ядра Пуассона в каждой точке $\lambda_k$:

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{|\operatorname{Im}\lambda_k|}{(t-\operatorname{Re}\lambda_k)^2+(\operatorname{Im}\lambda_k)^2} \leqslant \frac{1}{\pi\sin^2\alpha}\,\frac{|\operatorname{Im}\lambda_k|}{|\lambda_k|^2} = \frac{1}{\pi\sin^2\alpha}\,\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_k}\Bigr|.$$

Отсюда ввиду (6.10) для произвольной тестовой функции $\varphi \in R\mathcal{P}_0^m$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\varphi)(\lambda_k) &:= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\operatorname{Im}\lambda_k|}{(t-\operatorname{Re}\lambda_k)^2+(\operatorname{Im}\lambda_k)^2}\,\varphi(t)\,dt\\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\pi\sin^2\alpha}\,\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_k}\Bigr|\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi\sin^2\alpha}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Если мы выберем $\varepsilon$ достаточно малым, то $\frac{\varepsilon}{\pi\sin^2\alpha} \leqslant \frac{2\sigma'}{2\pi} < \frac{2\sigma}{2\pi}$, и условие ограниченности верхней точной грани в (2.11) (или в (2.12)) выполнено. По второй части теоремы о полноте система $\operatorname{Exp}^\Lambda$ неполна в $C(I_{2\sigma'})$ и $L^p(I_{2\sigma'})$ без одной или двух экспонент. Таким образом, система $\operatorname{Exp}^\Lambda$ неполна в $C(I_d)$ и в $L^p(I_d)$ для любого $d>0$. □

**6.2. Устойчивость подпоследовательности нулей и полноты.** Следующий результат, по-видимому, новый.

**Теорема 4.** *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *и* $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *— две последовательности точек на* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *без точек сгущения в* $\mathbb{C}$ *конечной верхней плотности и суммы* (ср. с (1.5))

$$\sum_k \Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{\lambda_k}\Bigr|, \quad \sum_k \Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{\gamma_k}\Bigr| \tag{6.11}$$

*конечны. Допустим, что* $\Lambda$ *— подпоследовательность нулей для* $B_\sigma^\infty$*. Если для некоторого* $k_0\in\mathbb{N}$ *и числа* $s\in\mathbb{R}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\biggl(\sum_{k>k_0}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\gamma_k}\Bigr| - \sum_{k>k_0}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\lambda_k}\Bigr|\biggr) \leqslant s, \tag{6.12}$$

*то* $s > -\sigma$ *и* $\Gamma$ *— подпоследовательность нулей для* $B_{\sigma+s}^\infty$*. В частности, если* $s=0$*, то* $\Gamma$ *— подпоследовательность нулей для того же* $B_\sigma^\infty$*.*

Отсюда и из теоремы 2 стандартным способом легко получается

**Следствие 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 4 *до конечности сумм* (6.11) *включительно. Если для некоторого числа* $s \in \mathbb{R}$ *имеет место неравенство* (6.12) *и* $2s < d$, *то избыток* $\operatorname{exc}\Lambda$ *для* $C(\overline{I}_{d-2s})$ *или* $L^p(I_{d-2s})$ *с* $p \geqslant 2$ *не меньше* $\operatorname{exc}\Gamma - 1$, *где* $\operatorname{exc}\Gamma$ — *избыток соответственно для* $C(\overline{I}_d)$ *или* $L^p(I_d)$ *с тем же значением* $p \geqslant 2$, *а также* $\operatorname{exc}\Lambda$ *для* $L^p(I_{d-2s})$ *при* $1 \leqslant p < 2$ *не меньше* $\operatorname{exc}\Gamma - 2$ *для* $L^p(I_d)$ *с таким же значением* $p$.

К этому следствию, по-видимому, уместен некоторый комментарий для случая $2s \geqslant d$. В этом случае либо $d = 2s$, $\overline{I}_{d-2s} = \overline{I}_0$ — одноточечное множество и любая система экспонент (даже из одной функции) полна в $C(\overline{I}_0)$, а $I_{d-2s} = I_0 = \varnothing$. И при $d < 2s$ имеем $I_{d-2s} = \overline{I}_{d-2s} = \varnothing$, а пространства функций на пустом множествеЁ— пустые множества.

**Доказательство теоремы 4.** Так как $\Lambda$ — подпоследовательность нулей для $B_\sigma^\infty$ и $\operatorname{Im}\lambda_k \neq 0$ для всех $r$, по теореме 1 с учетом замечания 4 найдется постоянная $C \in \mathbb{R}$, для которой

$$\int_{\mathbb{R}} \biggl(\sum_k \frac{1}{\pi}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\lambda_k}\Bigr|\biggr)\varphi(t)\,dt - \frac{\sigma}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt \leqslant C \quad \text{для всех } \varphi \in R\mathcal{P}_0^m.$$

Следовательно, по условию (6.12)

$$\int_{\mathbb{R}} \biggl(\sum_k \frac{1}{\pi}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\gamma_k}\Bigr|\biggr)\varphi(t)\,dt - \frac{\sigma+s}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\,dt \leqslant C, \quad \forall\,\varphi \in R\mathcal{P}_0^m. \tag{6.13}$$

Если $s \leqslant -\sigma$, то, выбирая одну точку из $\Gamma$ и обозначив ее как $\gamma_1$, из последнего соотношения ввиду положительности функций $\varphi$ получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\gamma_1}\Bigr|\varphi(t)\,dt \leqslant C \quad \text{для всех } \varphi \in R\mathcal{P}_0^m. \tag{6.14}$$

Но левая часть здесь не может быть равномерно ограничена, когда, к примеру, функции $\varphi$ пробегают подкласс (см. примеры из п. 4.2 выше) функций $t \mapsto \log^+\bigl(R/|t|\bigr)$, $t \in \mathbb{R}_*$, при $0 < R \to +\infty$. Действительно, в этом случае левая часть (6.14) не меньше, чем

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\Bigl|\operatorname{Im}\frac{1}{t-\gamma_1}\Bigr|\log\frac{R}{|t|}\,dt = \log\frac{R}{|\gamma_1|} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Таким образом, $s > -\sigma$, т.е. $\sigma + s > 0$. Из (6.13) и импликации 1) $\Rightarrow$ 2) теоремы 1 следует, что $\Gamma$ — последовательность неединственности, или подпоследовательность нулей, для пространства Бернштейна $B_{\sigma+s}^\infty$. □

В заключение авторы выражают глубокую признательность рецензенту первоначальных вариантов нашей работы за обнаруженные серьезные

ошибки и недочеты в следствиях к основным результатам и ряд весьма полезных и важных замечаний и советов.

## Список литературы

[1] Хабибуллин Б. Н., *Полнота систем экспонент и множества единственности*, РИЦ БашГУ, Уфа, 2012.
[2] Levin B. Ya., *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monographs, vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
[3] Levinson N., *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 26, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
[4] Schwartz L., *Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (4) **6** (1943), 111–176.
[5] Redheffer R. M., *Completeness of sets of complex exponential*, Adv. in Math. **24** (1977), no. 1, 1–62.
[6] Havin V. P., Jöricke B., *The uncertainly principle in harmonic analysis*, Ergeb. Math. Grenzg., vol. 28, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
[7] Sedletskii A. M., *Fourier transforms and approximation*, analytical Methods and Spectral Functions, Gordon and Breach Sci. Publ., Amsterdam, 2000.
[8] Седлецкий А. М., *Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* I, Совр. мат. Фунд. направления **5** (2003), 3–152.
[9] Седлецкий А. М., *Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* II, Совр. мат. Фунд. направления **6** (2003), 3–162.
[10] Makarov N., Poltoratski A., *Meromorphic inner functions, Toeplitz kernels and the uncertainty principle*, Perespectives in analysis, Math. Phys. Stud., vol. 27, Springer, Berlin, 2005, pp. 185–252.
[11] Baranov A. D., *Completeness and Riesz bases of reproducing kernels in model subspaces*, Int. Math. Res. Not., **2006**, Art. ID 81530, 2006.
[12] Баранов А. Д., *Модельные подпространства пространств Харди (неравенства Бернштейна, системы воспроизводящих ядер, теоремы типа Берлинга–Мальявена)*, Докт. дис., Спб., 2011.
[13] King F. W., *Hilbert transforms.* Vol. I, Encyclopedia Math. Appl., vol. 124, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
[14] King F. W, *Hilbert transforms.* Vol. II, Encyclopedia Math. Appl., vol. 125, Cambridge Univ. Press, 2009.
[15] Pandey J. N., *The Hilbert transform of Schwartz distributions and applications*, Wiley-Interscience Publ., 1996.

[16] Шварц Л., *Анализ.* Т. 1, Мир, М., 1972.

[17] Хабибуллин Б. Н., *Применения в комплексном анализе двойственного представления функционалов на векторных решетках*, Математический форум (Итоги науки. Юг России), Т. 4, Исслед. по мат. анализу, дифф. уравнениям и их прил., ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, 2010, 102–118.

[18] Хабибуллин Б. Н., *Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной*, Изв. АН СССР, сер. мат. **55** (1991), №5, 1101–1123.

[19] Григорян С. А., *Обобщенные аналитические функции*, Успехи мат. наук **49** (1994), № 2, 3–42.

[20] Хабибуллин Б. Н., *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций.* II, Изв. РАН. Сер. мат. **65** (2001), № 5, 1017–1039.

[21] Хабибуллин Б. Н., *Распределение нулей целых функций и выметание*, Докт. дисс., Харьков, 1993.

[22] Blanchet P., *On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions*, Complex Variables Theory Appl. **26**, (1995), no. 4, 311–322.

[23] Хабибуллин Б. Н., *Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций*, Мат. заметки **66** (1999), № 4, 603–616.

[24] Ransford T. J. *Potential theory in the complex plane*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[25] Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

[26] Брело М., *Основы классической теории потенциала*, Мир, М., 1964.

[27] Koosis P., *The logarithmic integral.* II, Cambridg Stud. Adv. Math., vol. 21, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[28] Хабибуллин Б. Н., *Неконструктивные доказательства теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций*, Изв. РАН. Сер. мат. **58** (1994), № 4, 125–148.

[29] Koosis P., *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Univ. de Montréal, Les Publ. CRM, Montréal, 1996.

Башкирский
государственный университет
450074, Уфа, ул. Заки Валиди, 32
Башкортостан
Россия
*E-mail:* Khabib-Bulat@mail.ru

Поступило 4 февраля 2012 г.