Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
201_, №_, с. 1–11 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Задачи описания подпоследовательностей нулей (последовательностей неединственности) для весовых пространств голоморфных функций по некоторой общей схеме сводятся к решению определенных задач уже в весовых классах субгармонических функций. Затрагиваются также некоторые геометрические вопросы и полнота экспоненциальных систем.

Ключевые слова: голоморфность, подпоследовательность нулей, множество неединственности, субгармоническая функция, система экспонент, ρ-выпуклая дополняемость, геометрическая разность, полное выметание

УДК: 517.53 : 517.574 : 514.17

Abstract. Problems of description of zero subsequences (non-uniqueness sequences) for weight spaces of holomorphic functions under some general scheme are reduced to a solution of certain problems already in weight classes of subharmonic functions. We affect also some geometrical questions and completeness of exponential systems.

Keywords: holomorphy, zero subseqence, non-uniqueness sequence, subharmonic function, exponential system, ρ-convex completability, geometric difference, full sweeping-out

1. Введение

1.1. **Основные обозначение, определения и соглашения.** Как обычно, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно всех *вещественных* и *комплексных чисел* или их естественные геометрические интерпретации; кроме того, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — *единичный круг* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Используются определения и понятия из [1], но при необходимости мы их повторяем. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Каждой не более чем счетной последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geqslant 1} \subset D$ без точек сгущения в D сопоставляем *считающую меру* n_Λ, а именно: $n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1$ — число точек из Λ, попавших в $S \subset D$. Заметим, что среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. Объединение $\Lambda \cup \Lambda_0$ двух таких последовательностей $\Lambda, \Lambda_0 \subset D$ полностью определяется считающей мерой $n_{\Lambda\cup\Lambda_0} := n_\Lambda + n_{\Lambda_0}$. По определению функция $n_\Lambda(\lambda) := n_\Lambda\bigl(\{\lambda\}\bigr)$ — дивизор последовательности Λ, т. е. число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ. Так, $\lambda \in \Lambda$, если $n_\Lambda(\lambda) > 0$.

Векторное пространство всех голоморфных в D функций обозначаем как $\mathrm{Hol}(D)$. Если не оговорено противное, пространство $\mathrm{Hol}(D)$ наделяем топологией равномерной сходимости

Поступила _._.201_

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-0030a.

на компактах из D. Ненулевой функции $f \in \mathrm{Hol}(D)$ соответствует *последовательность нулей* Zero_f, перенумерованная с учетом кратности.

Для компакта $C \subset \mathbb{C}$ через $\mathrm{CHol}[C]$ обозначаем векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ непрерывных на C комплекснозначных функций, одновременно голоморфных во *внутренности* $\operatorname{int} C$, если она не пуста, с естественной sup-нормой.

Последовательность точек $\Lambda \subset D$ называется *подпоследовательностью нулей* для подмножества $H \subset \mathrm{Hol}(D)$, если найдется ненулевая функция $f \in H$, для которой $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_f$ в том смысле, что $n_\Lambda(\lambda) \leqslant n_{\mathrm{Zero}_f}(\lambda)$ для всех $\lambda \in D$. Если H замкнуто относительно вычитания, например, векторное подпространство над $\mathbb{R}$, то подпоследовательность нулей для H называют и *последовательностью,* или *множеством, неединственности* для H.

Выпуклый конус всех субгармонических функций в области $D \subset \mathbb{C}$ обозначаем через $\mathrm{sbh}(D)$. Субгармоническую функцию, тождественно равную $-\infty$ на D, обозначаем $\boldsymbol{-\infty}$. Для $s \in \mathrm{sbh}(D)$ меру Рисса функции s чаще всего будем обозначать как ν_s, и наоборот, субгармоническую функцию s в D с мерой Рисса ν часто записываем в виде в виде $s := s_\nu$. Борелевскую положительную меру (конечную на компактах из D), или меру Радона ν [2, Appendix A], называем *подмерой для подмножества* $S \subset \mathrm{sbh}(D)$, если найдется функция $s \in S$, которая $\neq \boldsymbol{-\infty}$, с мерой Рисса $\nu_s \geqslant \nu$ на D. Иначе говоря, ν — подмера для S, если для некоторой (любой) субгармонической функции s_ν с мерой Рисса ν найдется функция $v \in \mathrm{sbh}(D)$, не равная $\boldsymbol{-\infty}$, для которой $s := s_\nu + v \in S$. Возможность варьирования слов «некоторый» и «любой» в последнем предложении обеспечена «нечуствительностью» неравенств к перекидыванию гармонических слагаемых от одного субгармонического слагаемого к другому, поскольку для любой гармонической в D функции h ее мера Рисса равна нулю и не влияет на определение.

Для (весовой) функции $M\colon D \to [-\infty, +\infty]$ со значениями в расширенной вещественной оси $[-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с естественным отношением порядка определим весовой класс субгармонических функций

$$\mathrm{sbh}(D; M] := \{s \in \mathrm{sbh}(D)\colon s \leqslant M + \mathrm{const} \text{ *на* } D\},$$

где здесь и далее const — какая-либо постоянная, а «$s \leqslant M + \mathrm{const}$ *на* D» означает выполнение поточечных неравенств $s(z) \leqslant M(z) + \mathrm{const}$ во всех точках $z \in D$. Аналогично, определим весовое пространство голоморфных функций

$$\mathrm{Hol}(D; \exp M] := \{f \in \mathrm{Hol}(D)\colon |f| \leqslant \mathrm{const} \cdot \exp M \text{ *на* } D\}.$$

1.2. **Постановка основной задачи и структура статьи.** В основном разделе 2 рассматривается следующая задача. Пусть N и M — две весовые функции в области $D \subset \mathbb{C}$ и Λ — последовательность точек в D. При каких простых соотношениях между N и M некоторая подмера $\mu \geqslant n_\Lambda$ для $\mathrm{sbh}(D; M]$ определяет подпоследовательность нулей Λ для пространства $\mathrm{Hol}(D; \exp N]$ или, возможно,чуть большего пространства? Более или менее удовлетворительное решение этой задачи позволяет свести исследование подпоследовательностей нулей к гибкому аппарату субгармонических функций, к тому же в классах $\mathrm{sbh}(D; M]$, отличных от $\mathrm{sbh}(D; N]$. Также в важном подразделе 3.1 тот же вопрос отдельно исследуется для весовых пространств функций на всей плоскости $\mathbb{C}$, определяемых положительно однородными при показателе $\rho > 0$ весовыми функциями. В заключительном подразделе 3.2 обсуждаются специальный случай $\rho = 1$, отдельные геометрические понятия и их связь с неполнотой в пространствах $\mathrm{CHol}[C]$ экспоненциальных систем

$$\mathrm{Exp}^\Lambda := \{z^p e^{\lambda z}\colon z \in \mathbb{C},\ \lambda \in \Lambda,\ 0 \leqslant p \leqslant n_\Lambda(\lambda) - 1,\ p \text{ — целое число}\}. \tag{1}$$

2. Последовательности неединственности

Для подмножества S топологического пространства через $\operatorname{bd} S$ обозначаем границу S; на евклидовом пространстве $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ — евклидово расстояние между двумя объектами (точками, подмножествами) в евклидовом пространстве (в нашем случае $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Пишем $D \Subset \mathbb{C}$, если область D *предкомпактна* в $\mathbb{C}$, т.е. просто ограничена. Весовой функции $N\colon D \to [-\infty,+\infty]$ будем сопоставлять некоторое ее «*поднятие*» $N^{\uparrow}\colon D \to [-\infty,+\infty]$, а именно: *для каждого $z\in D$ полагаем*

$$N^{\uparrow}(z) := \inf_{0<a<\operatorname{dist}(z,\operatorname{bd} D)} \left(\sup_{|z-w|\leqslant a} N(w) + \log\frac{1}{a} + 3\log\bigl(1+|z|+a\bigr)\right), \quad \textit{если } D\subset\mathbb{C}; \tag{2a}$$

$$N^{\uparrow}(z) := \inf_{0<b<\min\{e^{|z|},\,\operatorname{dist}(z,\operatorname{bd} D)\}} \left(\sup_{|z-w|\leqslant b} N(w) + \log\frac{1}{b}\right), \quad \textit{если } D\Subset\mathbb{C}; \tag{2b}$$

$$N^{\uparrow}(z) := \sup_{|z-w|\leqslant \bigl(1+|z|\bigr)^{-c}} N(w) + (3+c)\log\bigl(1+|z|\bigr), \quad \textit{если } D=\mathbb{C},\ 0<c=\mathrm{const}; \tag{2c}$$

$$N^{\uparrow}(z) := \sup_{|z-w|\leqslant d} N(w), \quad \textit{если } D=\mathbb{C},\ 0<d=\mathrm{const}. \tag{2d}$$

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, функции $N,M\in\operatorname{sbh}(D)$, $M-N\in\operatorname{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_{M-N}, $N,M\neq-\infty$, Λ — последовательность точек в D.*

Если Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(D;\exp N]$, то $n_\Lambda+\nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D;M]$.

Обратно, если $n_\Lambda+\nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D;M]$, N — непрерывная функция на D, то последовательность точек Λ — последовательность неединственности для пространства $\operatorname{Hol}(D;\exp N^{\uparrow}]$ с подходящей весовой функцией из (2).

Доказательство. Пусть Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(D;\exp N]$. Это означает, что для функции f_Λ с $\operatorname{Zero}_{f_\Lambda}=\Lambda$ найдется ненулевая функция $h\in\operatorname{Hol}(D)$, для которой произведение $f_\Lambda h\in\operatorname{Hol}(D;N]$, или $\log|f_\Lambda|+\log|h|\leqslant N$. Введем обозначение

$$s_{\nu_{M-N}} := M-N\in\operatorname{sbh}(D) \tag{3}$$

Тогда $\log|f_\Lambda|+\log|h|+s_{\nu_{M-N}}\leqslant N+(M-N)=M$ на D, т.е. для меры Рисса $n_\Lambda+\nu_{M-N}$ субгармонической функции $\log|f_\Lambda|+s_{\nu_{M-N}}$ нашлась субгармоническая функция $v=\log|h|\neq-\infty$, для которой сумма $\bigl(\log|f_\Lambda|+s_{\nu_{M-N}}\bigr)+v$ принадлежит классу $\operatorname{sbh}(D;M]$. Таким образом, установлено, что $n_\Lambda+\nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D;M]$.

Обратно, пусть $n_\Lambda+\nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D;M]$. Это значит, что найдется функция $w\in\operatorname{sbh}(D)$ с которой в обозначении (3)

$$\log|f_\Lambda|+s_{\nu_{M-N}}+w\leqslant M+\mathrm{const} \quad \textit{на } D.$$

Иначе

$$\log|f_\Lambda|+M-N+w-\mathrm{const}\leqslant M \quad \textit{на } D,$$

т.е.

$$\log|f_\Lambda|+v\leqslant N \quad \text{на } D \tag{4}$$

для функции $v=w-\mathrm{const}\in\operatorname{sbh}(D)$, $v\neq-\infty$. Будет использовано

Предложение 1 ([3, часть Предложения 9.1])**.** *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $u\in\operatorname{sbh}(D)$, непрерывна функция $N\colon D\to\mathbb{R}$. Если для субгармонической в D функции $v\neq-\infty$ выполнено неравенство $u+v\leqslant N$ на D, то найдется ненулевая функция $h\in\operatorname{Hol}(D)$, которая в* *каждой точке $z\in D$ для любого числа a, $0<a<\operatorname{dist}(z,\operatorname{bd}D)$, удовлетворяет неравенству*

$$u(z)+\log|h(z)|\leqslant \sup_{|z-w|\leqslant a}N(w)+\log\frac{1}{a}+3\log\bigl(1+|z|+a\bigr)+C, \tag{5}$$

где постоянная C не зависит от $z\in D$ и выбора a.

В [3] Предложение 1 доказано для псевдовыпуклых областей $D\subset\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, но в $\mathbb{C}$ любая область псевдовыпукла. Из Предложения 1 при $u=\log|f_\Lambda|$, существует функция $he^{-C}\neq 0$ из $\operatorname{Hol}(D)$, с которой выполнено неравенство

$$\log\bigl|f_\Lambda h e^{-C}\bigr|\leqslant N^{\uparrow}\quad \textit{на } D, \tag{6}$$

где весовая функция $N^{\uparrow}$ из (2a). Последнее по определению означает, что Λ — последовательность неединственности для пространства $\operatorname{Hol}(D;\exp N^{\uparrow}]$.

Если D — ограниченная область и в (2b) выбираются $b<e^{|z|}$, то справедливо ограничение $3\log\bigl(1+|z|+b\bigr)\leqslant C_1$ — постоянная, зависящая только от области D. Тогда (6) перепишется в виде $\log\bigl|f_\Lambda q e^{-C-C_1}\bigr|\leqslant N^{\uparrow}$ на D, где в правой части стоит уже функция из (2b), т. е. Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(D;\exp N^{\uparrow}]$.

При $D=\mathbb{C}$ для весовой функции $N^{\uparrow}$ возможны два варианта ее выбора — (2c) или (2d).
Вариант (2c)**.** Выберем в (6), где функция $N^{\uparrow}$ имеет еще вид (2a), вместо

$$\inf_{0<a<\operatorname{dist}(z,\operatorname{bd}\mathbb{C})=+\infty}\left(\sup_{|z-w|\leqslant a}N(w)+\log\frac{1}{a}+3\log\bigl(1+|z|+a\bigr)\right)$$

для каждого $z\in\mathbb{C}$ конкретное значение $a:=a(z):=\bigl(1+|z|\bigr)^{-c}$, $0<c=\text{const}$. Тогда

$$\log\frac{1}{a}+3\log\bigl(1+|z|+a\bigr)\leqslant(3+c)\log\bigl(1+|z|\bigr)+3\log 2$$

и оценку (6), несколько ослабляя, можно переписать в виде

$$\log\bigl|f_\Lambda h e^{-C}\bigr|\leqslant N^{\uparrow}+3\log 2\quad \textit{на } D, \tag{7}$$

где весовая функция $N^{\uparrow}$ уже определяется через (2c), и Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(D;\exp N^{\uparrow}]$.
Вариант (2d)**.** Для выбора этого варианта весовой функции $N^{\uparrow}$ при $D=\mathbb{C}$ потребуется

Предложение 2 ([3, часть Предложения 9.2])**.** *Пусть $u\in\operatorname{sbh}(\mathbb{C})$ и функция $N\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ непрерывна. Если для некоторой функции $b\in\operatorname{sbh}(\mathbb{C})$ выполнено неравенство $u+v\leqslant N$ на $\mathbb{C}$, то для любого числа $d>0$ найдется ненулевая целая функция h, для которой в каждой точке $z\in\mathbb{C}$ имеет место оценка*

$$u(z)+\log|q(z)|\leqslant\sup_{|z-w|\leqslant d}N(w),\quad z\in\mathbb{C}.$$

Из Предложения 2 при $u=\log|f_\Lambda|$ в силу (4) найдется ненулевая целая функция h, с которой выполнено неравенство $\log|f_\Lambda h|\leqslant N^{\uparrow}$ на $\mathbb{C}$, где функция $N^{\uparrow}$ выбрана как в (2d). Значит, Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(\mathbb{C};\exp N^{\uparrow}]$. $\square$

3. Пространства целых функций, задаваемые положительно однородными при показателе ρ весовыми функциями

3.1. **ρ-выпуклая дополняемость.** Пусть $\rho \in (0, +\infty)$. Обозначим через $\rho\text{-shg}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{sbh}(\mathbb{C})$ *множество субгармонических положительно однородных при показателе ρ функций $H \neq -\infty$*, т. е. $H(tz) = t^\rho H(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, $t \geqslant 0$. Через $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ обозначаем множество 2π*-периодических ρ-тригонометрически выпуклых*[1] *функций* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, [4]–[7]:

$$h(\theta)\sin\rho(\theta_2-\theta_1) \leqslant h(\theta_1)\sin\rho(\theta_2-\theta) + h(\theta_2)\sin\rho(\theta-\theta_1), \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 < \theta_1 + \frac{\pi}{\rho}\,. \tag{8}$$

Известно, что

(ρ1) *отображение-расширение* $\operatorname{ext}\colon h \longmapsto \bigl(H\colon re^{i\theta} \mapsto h(\theta)r^\rho,\ r \geqslant 0,\ \theta \in \mathbb{R}\bigr)$, *функций $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задает аддитивную положительно однородную сохраняющую точную верхнюю грань биекцию выпуклого конуса $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ на выпуклый конус $\rho\text{-shg}(\mathbb{C})$, и функции из $\rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ и $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ непрерывны* [4]–[6, § 2.3, I–VI], [7, Свойство 9.5, Теоремы 9.12];

(ρ2) *функция $H \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ удовлетворяет локальному условию Липшица в форме* (см. [6, § 2.3, IV] и детальнее [7, Свойство 9.25 и Следствие 9.26 с доказательством])

$$\bigl|H(z)-H(w)\bigr| \leqslant \rho \max_{\varphi\in\mathbb{R}} H(e^{i\varphi}) \cdot \bigl(\max\bigl\{|z|,|w|\bigr\}\bigr)^{\rho-1}|z-w|, \quad z,w \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

и, как следствие из (ρ1), *функция $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\bigl|h(\theta)-h(\vartheta)\bigr| \leqslant \rho \max_{\varphi\in\mathbb{R}} h(\varphi) \cdot |\theta-\vartheta|, \quad \theta,\vartheta \in \mathbb{R}; \tag{10}$$

(ρ3) в обозначениях из (ρ1) *плотность меры Рисса $d\nu_H$ функции $H \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ в полярных координатах определяется как произведение плотностей мер*

$$d\nu_H(re^{i\theta}) = r^{\rho-1}\,dr \otimes \frac{1}{2\pi}\bigl(h''(\theta)+\rho^2 h(\theta)\bigr)\,d\theta, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C},\ r \geqslant 0,\ \theta \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где производные понимаются в смысле теории распределений, или обобщеных функций, а $h''+\rho^2 h \geqslant 0$ — положительная 2π-периодическая мера на $\mathbb{R}$.

Пусть $h_1, h_2 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$. Воспользуемся терминологией диссертации А. В. Абанина [8, § 2.5] 1995 г., широко используемой при исследовании абсолютно представляющих систем. Называем функцию h_1 *ρ-выпукло дополнимой* до h_2, если $h_2 - h_1 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$. В этом случае представляется естественным называть и (см. (ρ1)) функцию $H_1 := \operatorname{ext} h_1 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ ρ-выпукло дополнимой до $H_2 := \operatorname{ext} h_2 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$. Из ($\rho$3) сразу следует, что h_1 *ρ-выпукло дополнима* до h_2, если и только если в смысле теории распределений, или обобщённых функций, $(h_2-h_1)''+\rho^2(h_2-h_1) \geqslant 0$, т. е. слева положительная 2π-периодическая мера на $\mathbb{R}$. В частности, отсюда

(a) *если функция $g \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, т. е. $g \in C^1(\mathbb{R})$, и*

$$g'(\psi)-g'(\varphi) \geqslant -c(\psi-\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi < \psi < 2\pi, \tag{12}$$

где $0 < c < \rho^2 \min\bigl\{g(\theta)\colon \theta \in [0,2\pi)\bigr\}$, то любая функция $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ класса $C^1(\mathbb{R})$, для которой

$$h'(\psi)-h'(\varphi) \leqslant C(\psi-\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi < \psi < 2\pi, \quad C \text{ — постоянная}, \tag{13}$$

[1] Используют также термины *тригонометрически ρ-выпуклая*, или *тригонометрически выпуклая при показателе (порядке) ρ*.

ρ-выпукло дополнима до функции $qg \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ для любого числа (см. [8, Лемма 2.5.1 и её доказательство])

$$q > \frac{C + \rho^2 \max h}{\rho^2 \min g - c}; \tag{14}$$

(b) *если $g \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$, $\min\{g(\theta) + g(\theta + \pi/\rho)\colon \theta \in [0, 2\pi]\} > 0$, и g' — неубывающая на $[0, 2\pi)$ (в частности, сюда включается и случай постоянной функции $g(\theta) \equiv R > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$), а $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет* (13), *то функция h ρ-выпукло дополнима до qg для любого q из* (14) *при $c = 0$* [8, § 2.5, Следствие 1];

(c) *если $g \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет* (12), *а $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вторую производную, т. е. в* (13) *постоянная $C = \sup |h''|$, то функция h ρ-выпукла дополнима до $qg \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ для любого числа q из* (14) [8, § 2.5, Следствие 1].

Теорема 2. *Пусть функция $h_1 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ ρ-выпукло дополнима до $h_2 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$, т. е. в обозначениях из* (ρ1) *функция $H_1 := \operatorname{ext} h_1 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ ρ-выпукло дополнима до функции $H_2 := \operatorname{ext} h_2 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$, а мера ν определена через произведение плотностей мер в полярных координатах по правилу* (см. и ср. с (11))

$$d\nu(re^{i\theta}) = r^{\rho-1}\, dr \otimes \frac{1}{2\pi}\bigl((h_2 - h_1)'' + \rho^2 (h_2 - h_1)\bigr)(\theta)\, d\theta, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C},\ r \geqslant 0,\ \theta \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Далее, пусть Λ последовательность точек в $\mathbb{C}$. Тогда если Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_1]$, то $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(\mathbb{C}; H_2]$, и обратно, если $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(\mathbb{C}; H_2]$, то

(1) *при $\rho \leqslant 1$ последовательность Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_1]$;*

(∞) *при $\rho > 1$ последовательность Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; p \exp H_1]$, где $p\colon z \mapsto |z|^{2+\rho}$, $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. В свете Теоремы 1 с $N = H_1$ и $M = H_2$ доказательства требуют только пп. (1) и (∞), которые выведем из заключительной части той же Теоремы 1. Для п. (1) выбираем $H_1^{\uparrow}$ в версии (2d) с $d = 1$, которая согласно условию Липшица (9) из (ρ2), или (10), дает неравенство $H_1^{\uparrow} \leqslant H_1 + \mathrm{const}$. Для п. ($\infty$) выбираем $H_1^{\uparrow}$ в версии (2c) с $c = \rho - 1$, откуда по условию Липшица (9) из (ρ2), или (10), при $\rho - 1 > 0$ получаем

$$H_1^{\uparrow}(z) \overset{(2c)}{=} \sup\Bigl\{H_1(w)\colon |z - w| \leqslant \bigl(1 + |z|\bigr)^{-(\rho-1)}\Bigr\} + \bigl(3 + (\rho - 1)\bigr)\log\bigl(1 + |z|\bigr)$$

$$\overset{(9)}{\leqslant} H_1(z) + \rho \max_{\varphi \in \mathbb{R}} H(e^{i\varphi}) \cdot \Bigl(|z| + \bigl(1 + |z|\bigr)^{-(\rho-1)}\Bigr)^{\rho-1} \bigl(1 + |z|\bigr)^{-(\rho-1)} + (2 + \rho)\log\bigl(1 + |z|\bigr)$$

$$\leqslant H_1(z) + \mathrm{const} + (2 + \rho)\log\bigl(1 + |z|\bigr), \quad z \in \mathbb{C},$$

что по заключительной части Теоремы 1 и доказывает п. (∞). □

3.2. **Случай $\rho = 1$. Геометрические аспекты.** *Суммой* двух множеств A и B из $\mathbb{C}$ называется множество $A + B := \{a + b\colon a \in A, b \in B\}$. В частности, для $z, b \in \mathbb{C}$ полагают $B + z := B + \{z\}$, $A - b := A + \{-b\}$. Обсуждавшееся в предыдущем п. 3.1 понятие ρ-выпуклой дополняемости возникло как аналитическое обобщение геометрического понятия *выпукло дополнимой* выпуклой подобласти $D \subset G \subset \mathbb{C}$ до выпуклой области G, а именно: *существует выпуклый компакт $C \subset \mathbb{C}$, для которого $D + C = G$.* Это означает, что опорная функция выпуклой подобласти D 1-выпукло дополнима до опорной функции выпуклой области G. Выпукло дополнимые подобласти впервые были определены в совместной работе Ю. Ф. Коробейника и А. Ф. Леонтьева [9, **§ 2]** 1980 г. в связи с исследованием внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент. Однако за 11 лет до этого для потребностей теории оптимального управления и теории дифференциальных игр в совместных работах П. Б. Гусятникова и М. С. Никольского [10, п. 4], [11], развивающих исследования Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко и Б. Н. Пшеничного, было введено даже более общее (для любых множеств, а не только для областей) и вполне конструктивное понятие *полного выметания* одним множеством в $\mathbb{C}$ другого множества из $\mathbb{C}$ в классических терминах выпуклой геометрии, восходящих к Г. Минковскому. Конкретнее, *геометрической разностью,* или *разностью Минковского,* множеств A и B называется множество [12, Определение 8.5], [13, Определение 1.1.1], [14, **§ 12]**

$$A \overset{*}{-} B := \{z \in \mathbb{C} \colon B + z \subset A\} = \bigcap_{b \in B} (A - b). \tag{16}$$

Отметим, что геометрическая разность (16) множеств A и B в случае выпуклого (замкнутого или ограниченного) множества A — снова выпуклое (соответственно замкнутое или ограниченное) множество [14, Теоремы 12.3, 12.4]. В частном случае, когда имеет место равенство $(A \overset{*}{-} B) + B = A$, говорят [13, Замечание 1.1.1], [14, определение 12.2], что множество B *полностью выметает* множество A. Позволим себе процитировать по этому поводу [13, Замечание 1.1.1]: «термин *полное выметание* объясняется тем, что для любой граничной точки $a \in \operatorname{bd} A$, где $\operatorname{bd} A$ — граница множества A, найдется такая точка $z \in \mathbb{C}$, что сдвиг множества B на z содержится во множестве A, т. е. справедливо включение $B + z \subset A$, причем это включение таково, что $a \in \operatorname{bd}(B + z)$. В этом случае геометрическая разность по существу является обратной операцией к операции суммы множеств.» В частности, выпуклая подобласть $D \subset G$ выпукло дополнима до выпуклой области G тогда и только тогда, когда D полностью выметает область G [14, Теорема 12.5]. Более раннее, используемое и поныне [15], общепринятое в разделах математики, использующих выпуклые множества, понятие полного выметания, насыщенное богатейшим набором конкретных фактов и примеров (см., например, обширное и весьма детальное совместное исследование С. Н. Аввакумова и Ю. Н. Киселева [16]) представляется нам более предпочтительным, поскольку его можно использовать даже в ситуациях (не в этой статье), когда «вычитаемое» множество B в (16) может быть и не выпуклым.

Из этих комментариев нетрудно видеть, что выпуклая область (выпуклый компакт) $B \subset \mathbb{C}$ с 2π-периодической опорной функцией (см. [4], [5])

$$h_B \colon \theta \mapsto \sup_{z \in B} \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

которая в случае ограниченности B всегда выпукла и непрерывна, полностью выметает ограниченную выпуклую область (соответственно выпуклый компакт) A в том и только том случае, когда имеет место равенство $h_A - h_B = h_{A \overset{*}{-} B}$. Как и в п. ($\rho$1), нам удобнее рассматривать продолженные на всю плоскость опорные функции $H_B\colon z\mapsto h_B(\theta)r$, $z=re^{i\theta}$, $r\geqslant 0$, которые для ограниченных выпуклых областей (выпуклых компактов) B являются субгармоническими положительно однородными выпуклыми непрерывными функциями. Из приведенных определений и комментариев сразу следует, что выпуклая область (выпуклый компакт) B полностью выметает ограниченную выпуклую область (выпуклый компакт) $A\subset\mathbb{C}$, если и только если в обозначении ext из (ρ1) выполнено равенство $H_A-H_B=H_{A\divideontimes B}=\operatorname{ext}h_{A\divideontimes B}$.

В случае полного выметания выпуклой ограниченной области (выпуклого компакта) A выпуклой областью (выпуклым компактом) B для мер Рисса ν_{H_A}, ν_{H_B}, $\nu_{H_{A\divideontimes B}}$ выпуклых, а значит и субгармонических, функций H_A, H_B, $H_{A\divideontimes B}$ имеем серию равенств (здесь Δ — оператор Лапласа и производные действуют в смысле теории распределений, или обобщенных функций; см. и ср. с (11) из (ρ3))

$$\begin{aligned}\nu_{H_A}-\nu_{H_B}=\nu_{H_{A\divideontimes B}}=\frac{1}{2\pi}\Delta H_{A\divideontimes B}(z)&=\frac{1}{2\pi}\bigl(h''_{A\divideontimes B}(\theta)+h_{A\divideontimes B}(\theta)\bigr)\,d\theta\otimes\,dr\\&=\frac{1}{2\pi}\bigl(h''_A(\theta)-h''_B(\theta)+h_A(\theta)-h_B(\theta)\bigr)\,d\theta\otimes\,dr.\end{aligned}\tag{18}$$

При этом Теорема 2 в части (1) при $\rho=1$ может быть переформулирована как

Следствие 1. *Пусть непустой выпуклый компакт $B\subset\mathbb{C}$ полностью выметает выпуклый компакт $A\subset\mathbb{C}$. Последовательность точек Λ в $\mathbb{C}$ — последовательность неединственности для пространства* $\operatorname{Hol}(\mathbb{C};\exp H_B]$ *тогда и только тогда, когда в обозначениях* (18) *мера $n_\Lambda+\bigl(\nu_{H_A}-\nu_{H_B}\bigr)$ — это подмера для класса* $\operatorname{sbh}(\mathbb{C};H_A]$.

Для $S\subset\mathbb{C}$ сопряженное множество обозначаем как $\overline{S}:=\{z\in\mathbb{C}\colon \bar z\in S\}$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия Следствия* 1. *Если система* $\operatorname{Exp}^\Lambda$ (см. (1)) *не полна в пространстве* $\operatorname{CHol}[B]$, *то* $n_\Lambda+\nu_{H_{\overline{A}}}-\nu_{H_{\overline{B}}}$ *— подмера для класса* $\operatorname{sbh}(\mathbb{C};H_{\overline{A}}]$. *Обратно, если* $n_\Lambda+\nu_{H_{\overline{A}}}-\nu_{H_{\overline{B}}}$ *— подмера для* $\operatorname{sbh}(\mathbb{C};H_{\overline{A}}]$, *то, удалив из* Λ *произвольные две точки* λ',λ'', *получим неполную в* $\operatorname{CHol}[B]$ *систему* $\operatorname{Exp}^{\Lambda\setminus\{\lambda',\lambda''\}}$.

Набросок доказательства. Пусть система $\operatorname{Exp}^\Lambda$ не полна в $\operatorname{CHol}[B]$. Тогда Λ — последовательность неединственности (см. [1, гл. 1, 1.1, ср. Теорема 3.3.1]) для пространства $\operatorname{Hol}(\mathbb{C};H_{\overline{B}}]$. Следовательно, по Следствию 1 в части необходимости $n_\Lambda+\nu_{H_{\overline{A}}}-\nu_{H_{\overline{B}}}$ — подмера для $\operatorname{sbh}(\mathbb{C};H_{\overline{A}}]$. Обратно, если $n_\Lambda+\nu_{H_{\overline{A}}}-\nu_{H_{\overline{B}}}$ — подмера для $\operatorname{sbh}(\mathbb{C};H_{\overline{A}}]$, то по Следствию 1 в части достаточности существует ненулевая целая функция $f\in\operatorname{Hol}(\mathbb{C};\exp H_{\overline{B}}]$ с подпоследовательностью нулей Λ. Если поделить функцию f на произведение двучленов $z\mapsto(z-\lambda')(z-\lambda'')$, $z\in\mathbb{C}$, то результат деления $\bigl|f(z)/\bigl((z-\lambda')(z-\lambda'')\bigr)\bigr|=O\bigl(|z|^{-2}\exp H_{\overline{B}}(z)\bigr)$, $z\to\infty$, будет характеристической функцией (преобразованием Фурье–Лапласа) некоторой ненулевой меры с носителем на B, т.е. ненулевым линейным непрерывным функционалом на $\operatorname{CHol}[B]$, аннулирующим систему экспонент $\operatorname{Exp}^{\Lambda\setminus\{\lambda',\lambda''\}}$. Последнее означает, что эта система не полна в $\operatorname{CHol}[B]$, что и требовалось. $\square$

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Рассмотрим класс субгармонических функций конечного типа при порядке 1

$$\operatorname{sbh}(\mathbb{C}; H_D) := \Bigl\{u \in \operatorname{sbh}(\mathbb{C})\colon h_u(\theta) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{u(re^{i\theta})}{r} < h_D(\theta)\Bigr\},$$

где h_u — индикатор роста функции u при порядке 1, а также его голоморфный аналог — пространство целых функций экспоненциального типа

$$\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_D) := \bigl\{f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C})\colon \log|f| \in \operatorname{sbh}(\mathbb{C}; H_D)\bigr\}.$$

Следствие 3. *Пусть выпуклая область D полностью выметает ограниченную выпуклую область G. Последовательность точек Λ в $\mathbb{C}$ — последовательность неединственности для пространства* $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_D)$ *тогда и только тогда, когда мера $n_\Lambda + \bigl(\nu_{H_G} - \nu_{H_D}\bigr)$ — это подмера для класса* $\operatorname{sbh}(\mathbb{C}; H_G)$.

Доказательство опускаем. Оно легко выводится из Следствия 1.

Следствие 4. *В условиях Следствия* 3 *система* $\operatorname{Exp}^\Lambda$ *не полна в* $\operatorname{Hol}(D)$*, если и только если мера $n_\Lambda + \bigl(\nu_{H_{\overline{G}}} - \nu_{H_{\overline{D}}}\bigr)$ — это подмера для класса* $\operatorname{sbh}(\mathbb{C}; H_{\overline{G}})$.

Легко выводится из Следствия 3 или из Следствия 2.

Замечание 1. Близкий к Следствию 4 и легко выводимый из него результат был получен А. А. Румянцевой в ее диссертации (см. автореферат [17, Теорема 2.1], [18], [19]). Приведем его в более прозрачной форме. В [17]–[19] для *выпуклой области D* с *дважды непрерывно дифференцируемой* 2π-периодической опорной функцией h_D из (17) задается число $R_{\max} := \max\bigl\{h''_D(\theta) + h(\theta)\colon \theta \in [0, 2\pi]\bigr\}$. Тогда, как было отмечено еще в [8, Лемма 1.9.1] (даже для многих переменных и произвольного порядка ρ) область D выпукло дополнима, или полностью выметает, круг $R_{\max}\mathbb{D}$. Пусть Λ_0 — некоторая правильно распределенная последовательность точек в $\mathbb{C}$ при порядке 1 с индикатором $H_{(R_{\max}\mathbb{D}) \overset{*}{-} D}$ [4, гл. II, § 1]. В [4, гл. II, §§ 4–6] приведена явная конструкция для такой последовательности Λ_0. Заметим, что у А. А. Румянцевой используется гораздо более сложная и, вообще говоря, неявная последовательность Λ_0. Результат из [17]–[19]: *система* $\operatorname{Exp}^\Lambda$, $\Lambda \subset \mathbb{C}$, *не полна в* $\operatorname{Hol}(D)$, *если и только если система* $\operatorname{Exp}^{\Lambda\cup\Lambda_0}$ *не полна в* $\operatorname{Hol}(R_{\max}\mathbb{D})$. В [19] предлагается также отдельное рассмотрение случая, когда D — эллипс. Кстати отметим, что точное описание неполных систем экспонент для пространств в круге по некоторым косвенным признакам представляется гораздо более сложной задачей, нежели подобная проблема для пространств в выпуклом многоугольнике, в частности, в треугольнике.

Замечание 2. Для *неограниченных выпуклых* областей $D \subset \mathbb{C}$ задача о законченном описании полных систем $\operatorname{Exp}^\Lambda$ в пространствах $\operatorname{Hol}(D)$ и некоторых других пространствах на замыканиях таких D полностью решена в [20, Теорема 2], [21], [1, **3.2**].

Замечание 3. Обобщения наших результатов на весовые классы голоморфных и целых функций в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, а также распространения Следствий 1–4 на ρ-выпуклые компакты и/или области в $\mathbb{C}$ и неполноту систем функций Миттаг-Леффлера предполагается рассмотреть в ином месте.

Автор глубоко признателен А. В. Абанину за весьма ценные замечания, полезные советы по расстановке акцентов и предоставленную возможность ознакомления с [8].

Литература

[1] Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности* 4-е доп. издание (РИЦ БашГУ, Уфа, 2012)

[2] Ransford Th. *Potential Theory in the Complex Plane* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)

[3] Хабибуллин Б.Н. *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций.* II, Известия РАН. Серия матем. **65** (5), 167–190 (2001).

[4] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций* (Физматгиз, М., 1956)

[5] Levin B.Ya. *Lectures on entire functions* (Amer. Math. Soc., Transl. Math. Monographs, Providence RI, **150**, 1996)

[6] Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции* 3-е доп. издание (Физматлит, М., 1979)

[7] Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения* (Наука, Новосибирск, 1991)

[8] Абанин А.В. *Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы,* Дисс. . . . доктора физ.-матем. наук (РГУ, Ростов-на-Дону, 1995)

[9] Коробейник Ю.Ф., Леонтьев А.Ф. *О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент,* Матем. заметки, **28** (2), 243–254 (1980).

[10] Гусятников П.Б., Никольский М.С. *Об оптимальности времени преследования,* Доклады АН СССР **184** (3), 518–521 (1969).

[11] Гусятников П.Б., Никольский М.С. *К проблеме оптимальности времени преследования,* в трудах семинара «Теория оптимальных решений» (Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1969) № 3, с. 3–21.

[12] Лейхтвейс К. *Выпуклые множества* (Наука, М., 1985)

[13] Половинкин Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа* (Физматлит, М., 2004)

[14] Петров Н.Н. *Введение в выпуклый анализ.* (Удмуртский государственный университет, Ижевск, 2009)

[15] Кумков С.С. *Особенности множеств уровня функции цены в линейных дифференциальных играх,* Дисс. . . . кандидата физ.-матем. наук (УрГУ, Екатеринбург, 2007) (электронная версия http://diss4all.ru/?cat=1&spec=20&n=129).

[16] Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. *Опорные функции некоторых специальных множеств, конструктивные процедуры сглаживания, геометрическая разность,* в сб. «Проблемы динамического управления» (МАКС Пресс, М., 2005), вып. 1, с. 24–110 (электронная версия http://oc.cs.msu.su/download/76/kiselev05.pdf).

[17] Румянцева А.А. *Асимптотика δ-субгармонических функций и их ассоциированных мер. Применение в вопросах полноты систем экспонент,* Автореферат дисс. . . . канд. физ.-матем. наук (Институт математики с вц УНЦ РАН, Уфа, 2010)

[18] Румянцева А.А. *О полноте систем экспонент в пространстве функций, аналитических в выпуклой области,* Материалы международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию ректора МГУ Садовничего В.А., Уфа, июнь 2009 (Изд-во Института математики с вц УНЦ РАН, 2009), с. 92.

[19] Махота[Румянцева] А.А. *Сведение задачи о полноте систем экспонент из выпуклой области с гладкой границей на круг,* Материалы Международной конференции «Нелинейные уравнения и комплексный анализ», тезисы докладов, Уфа, 18–22 марта 2013 (Изд-во Института математики с вц УНЦ РАН), с. 40–41.

[20] Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси,* Матем. сб., **180** 5, 706–719 (1989).

[21] Хабибуллин Б.Н. *О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями,* Analysis Mathematica, **17** 3, 239–256 (1991).

Хабибуллин Булат Нурмиевич

450074, г. Уфа, ул. З. Валиди, 32, БашГУ, ФМиИТ, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии, профессор

`e-mail:` khabib-bulat@mail.ru

Khabibullin Bulat Nurmievich

Prof., Head of the Chair of Higher Algebra and Geometry, Dept. of Math. & IT, Bash. State Univ., Z. Validi Str., Ufa, Bashkortostan, 450074, RUSSIA

e-mail: khabib-bulat@mail.ru