Б. Н. Хабибуллин, Теорема Хелли и сдвиги множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции, *Уфимск. матем. журн.*, 2014, том 6, выпуск 4, 125–138

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 125-138.

УДК 514.17 : 517.547.2 : 517.555

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И СДВИГИ МНОЖЕСТВ. II. ОПОРНАЯ ФУНКЦИЯ, СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ, ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Пусть $\mathcal{S}$ — семейство множеств в $\mathbb{R}^n$, S — объединение всех этих множеств и C — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. В терминах опорных функций множеств из $\mathcal{S}$ и множества C устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых некоторый параллельный сдвиг множества C покрывает множество S. Отдельно исследуется двумерный случай, когда множества неограничены, для чего используются дополнительные характеристики множеств. Даны применения этих результатов к задачам неполноты экспоненциальных систем в пространствах функций.

Ключевые слова: выпуклое множество, система линейных неравенств, сдвиг, опорная функция, неполнота систем экспонент, индикатор целой функции.

Mathematics Subject Classification: 52A35, 52A20

1. Введение и некоторые ключевые результаты

Используются обозначения предыдущей первой части работы [1] и, зачастую, не оговаривая специально, известные факты и термины из [2]–[6]. Тем не менее, в п. **1.1** для удобства ссылок мы напоминаем основные элементарные свойства опорных функций. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ через $\operatorname{cl} S$, $\operatorname{int} S$, $\operatorname{co} S$ обозначаем соответственно *замыкание, внутренность, выпуклую оболочку* множества S; $B(x,r)$ — открытый шар с центром x радиуса $r > 0$ в $\mathbb{R}^n$.

1.1. Для произвольного множества $S \subset \mathbb{R}^n$ в обозначении $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для скалярного произведения на $\mathbb{R}^n$ функция

$$H_S \colon \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty], \quad H_S(a) := \sup_{s \in S} \langle a, s \rangle, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

— *опорная функция* множества $S \subset \mathbb{R}^n$. В частности, если $S = \varnothing$ — *пустое множество* в $\mathbb{R}^n$, то $H_\varnothing(a) \equiv -\infty$, $a \in \mathbb{R}^n$, согласно традиционному соглашению $\sup \varnothing = -\infty$ и $\inf \varnothing = +\infty$ для пустого подмножества в $[-\infty, +\infty]$. Обратно, если $H_S(a) = -\infty$ хотя бы для одного $a \in \mathbb{R}^n$, то $S = \varnothing$. Таким образом, если $S \neq \varnothing$, то *образ* $H_S(\mathbb{R}^n) \subset (-\infty, +\infty]$. Наконец, множество $S \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, если и только если $H_S(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$.

Опорная функция *положительно однородна,* т. е.

$$H_S(\lambda a) \equiv \lambda H_S(a), \quad \lambda \in (0, +\infty),\ a \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \cdot (\pm\infty) := \pm\infty, \tag{1}$$

субаддитивна, т. е. $H_S(a + a') \leqslant H_S(a) + H_S(a')$ для всех $a, a' \in \mathbb{R}^n$, *полунепрерывна снизу* и даже *непрерывна,* если S ограничено, а также обладает топологически-алгебраическими свойствами $H_S = H_{\operatorname{cl} S} = H_{\operatorname{co} S} = H_{\operatorname{cl} \operatorname{co} S}$, $S \subset \mathbb{R}^n$, которые для *выпуклого* S при $\operatorname{int} S \neq \varnothing$

B.N. Khabibullin, Helly's Theorem and shifts of sets. II. Support function, exponential systems, entire functions.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00030-а).

Поступила 25 февраля 2014 г.

можно дополнить равенствами $H_{\operatorname{int} S} = H_{\operatorname{int}\operatorname{cl} S} = H_S = H_{\operatorname{cl}\operatorname{int} S}$. Очевидно, для одноточечного множества $S = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ при любом $a \in \mathbb{R}^n$ имеем $H_{\{x\}}(a) = \langle x, a\rangle = \langle a, x\rangle$.

Для выпуклого $C \subset \mathbb{R}^n$ множество $S \subset \mathbb{R}^n$ содержится в C при замкнутом C или открытом S, если и только если $H_S(a) \leqslant H_C(a)$ для всех $a \in \mathbb{R}^n$.

Множество $S \subset C \subset \mathbb{R}^n$ *предкомпактно включается* в открытое множество C, если и только если в индуцированной на C с $\mathbb{R}^n$ топологии замыкание $\operatorname{cl} S$ — компакт в C (пишем $S \Subset C$).

1.2. Основная рассматриваемая задача для $S \subset \mathbb{R}^n$ и выпуклого $C \subset \mathbb{R}^n$ — в терминах опорных функций (прежде всего) или каким-либо иным функциональным способом дать необходимые и достаточные условия, при которых некоторый сдвиг S содержится в C, когда S представлено объединением произвольных множеств. В основе исследования этой задачи лежит элементарное

Предложение 1. *Пусть C — непустое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$.*

Если C замкнутое или S открытое множество, то некоторый сдвиг множества S содержится в C в том и только том случае, когда найдется $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $\langle a, x\rangle + H_S(a) \leqslant H_C(a)$ при всех $a \in \mathbb{R}^n$.

Для открытого C некоторый сдвиг S предкомпактно включается в C тогда и только тогда, когда S ограничено, т. е. $H_S(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$, и найдется $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $\langle a, x\rangle + H_S(a) < H_C(a)$ при всех $a \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Некоторый сдвиг множества S содержится в C тогда и только тогда, когда найдется $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $S + x \subset C$, откуда $\langle a, x\rangle + H_S(a) = H_{S+x}(a) \leqslant H_C(a)$ для всех $a \in \mathbb{R}^n$. Обратно, если C замкнутое или S открытое множества, то включение $S + x \subset C$ означает, что, как отмечалось выше, $H_{S+x}(a) \leqslant H_C(a)$, где левая часть есть $\langle a, x\rangle + H_S(a)$, что доказывает первую часть Предложения 1.

Если S — ограниченное множество, то H_S — непрерывная функция, и при этом $\langle \cdot, x\rangle + H_S - H_C$ — полунепрерывная сверху функция и достигает своего максимального значения $-\varepsilon < 0$ на единичной сфере с центром в 0. Отсюда в силу положительной однородности опорной функции $\langle a, x\rangle + H_{\operatorname{cl} S}(a) + \varepsilon|a| \leqslant H_C(a)$ для всех $a \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, имеем включение $x + \operatorname{cl} S + \varepsilon B(0,1) \subset C$ и компактность $\operatorname{cl} S$ в C. Предложение доказана. □

1.3. Приведем в этом подразделе формулировки некоторых характерных результатов для случая выпуклого компакта $C \subset \mathbb{R}^n$, который рассмотрен достаточно полно (см. Теоремы 1, 2 во Введении). Ситуация неограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^n$ ввиду ее многовариантности при $n \geq 3$ рассмотрена здесь лишь для некоторых случаев (см. п. 3.1, раздел 3) и несколько более детально для плоского случая $n = 2$, т. е. для $C \subset \mathbb{C}$, где комплексная плоскость $\mathbb{C}$ отождествляется с $\mathbb{R}^2$ (см. п. 3.2, раздел 3). Случаи ни замкнутого, ни открытого выпуклого множества C вовсе не затрагиваются как весьма затруднительные даже в выборе подходящей терминологии. В последнем разделе 4 доказываются теоремы о неполноте систем экспонент в различных функциональных пространствах, иллюстрирующих важность для этих вопросов возможности покрытия сдвигом выпуклого множества некоторого объединения множеств.

Теорема 1 (для выпуклых множеств $C \Subset \mathbb{R}^n$)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}$ — семейство множеств из $\mathbb{R}^n$, а S — объединение всех множеств из $\mathcal{S}$. Допустим, что C замкнутое или S открытое множество. Тогда попарно эквивалентны следующие четыре утверждения:*

1. *некоторый сдвиг множества S содержится в C;*

2. *для любого набора $n+1$ множеств $S_1,\dots,S_{n+1}$ из семейства $\mathcal{S}$ и любого набора $n+1$ замкнутых полупространств $C_1,\dots C_{n+1}$, содержащих C и ограниченных опорными гиперплоскостями к выпуклому множеству C, найдется вектор x, для которого каждый сдвиг S_k+x содержится в замкнутом полупространстве C_k при всех $k=1,\dots,n+1$;*
3. *для любого набора $n+1$ множеств $S_1,\dots,S_{n+1}$ из семейства $\mathcal{S}$ и любых наборов $n+1$ векторов $a_1,\dots,a_{n+1}\in\mathbb{R}^n$ и чисел $p_1,\dots,p_{n+1}\geq 0$ при условии*
$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k a_k = 0$$
выполнено неравенство
$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k H_{S_k}(a_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} p_k H_C(a_k);$$
4. *для любого набора $n+1$ множеств $S_1,\dots,S_{n+1}$ из семейства $\mathcal{S}$ и для любого набора $n+1$ векторов*
$$\begin{cases} a_1 = (a_{11},\dots,a_{1n})\in\mathbb{R}^n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,\\ a_{n+1}=(a_{n+1,1},\dots,a_{n+1,n})\in\mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2}$$
ранга $r>0$ существует отличный от нуля минор
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{k_1j_1} & \cdots & a_{k_1j_r}\\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k_rj_1} & \cdots & a_{k_rj_r}\end{vmatrix} \tag{3}$$
r-го порядка, для которого выполняются неравенства $(k=1,\dots,n+1)$
$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{k_1j_1} & \cdots & a_{k_1j_r} & H_{S_{k_1}}(a_{k_1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_rj_1} & \cdots & a_{k_rj_r} & H_{S_{k_r}}(a_{k_r})\\ a_{kj_1} & \cdots & a_{kj_r} & H_{S_k}(a_k)\end{vmatrix} \leqslant \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{k_1j_1} & \cdots & a_{k_1j_r} & H_C(a_{k_1})\\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_rj_1} & \cdots & a_{k_rj_r} & H_C(a_{k_r})\\ a_{kj_1} & \cdots & a_{kj_r} & H_C(a_k)\end{vmatrix}. \tag{4}$$

В плоском случае $n=2$ отождествляем $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$:
$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y)\mapsto x+iy =: z := re^{i\theta}\in\mathbb{C},\ i \text{ — мнимая единица, } r\geq 0,\ \theta\in\mathbb{R}.$$
При этом чаще всего по традиции [7], [8] вместо опорной функции H_S рассматривается 2π-периодическая функция $h_S\colon \mathbb{R}\to[-\infty,+\infty]$, также называемая *опорной функцией* для $S\subset\mathbb{C}$ и определенная через сужение H_S на единичную окружность по правилу
$$h_S(\theta) := H_S(e^{i\theta}) = \sup_{s\in S}\operatorname{Re} se^{-i\theta},\quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{5}$$
Ввиду положительной однородности (1) функции H_S она однозначно восстанавливается по функции h_S, а Теорема 1 переформулируется как

Теорема 2 (для выпуклых множеств $C\Subset\mathbb{C}$)**.** *Пусть C — выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, $\mathcal{S}$ — семейство множеств из $\mathbb{C}$, а S — объединение всех множеств из $\mathcal{S}$. Допустим, что C замкнутое или S открытое множество. Тогда следующие четыре утверждения попарно эквивалентны:*

1. *некоторый сдвиг множества S содержится в C;*

2. *для любого набора трех множеств* S_1, S_2, S_3 *из* $\mathcal{S}$ *и любого замкнутого непустого*[1] *треугольника, описанного вокруг* C, *найдется точка* $z \in \mathbb{C}$, *для которой все три сдвига* S_1+z, S_2+z, S_3+z *содержатся в этом треугольнике;*
3. *для любого набора трех множеств* $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ *и для любых наборов трех чисел* $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ *и чисел* $q_1, q_2, q_3 \geq 0$ *при условии*
$$q_1 e^{i\theta_1} + q_2 e^{i\theta_2} + q_3 e^{i\theta_3} = 0$$
выполнено неравенство
$$q_1 h_{S_1}(\theta_1) + q_2 h_{S_2}(\theta_2) + q_3 h_{S_3}(\theta_3) \leqslant q_1 h_C(\theta_1) + q_2 h_C(\theta_2) + q_3 h_C(\theta_3);$$
4. *для любого набора трех множеств* $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ *и для любого набора чисел* $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ *имеют место оба из условий*
   (a) *если всякая разность из этого набора чисел кратна* π, *то для каждой пары номеров* $k, j \in \{1, 2, 3\}$, *для которых разность* $\theta_j - \theta_k$ *не кратна* 2π, *выполнено неравенство*
$$h_{S_1}(\theta_k) + h_{S_2}(\theta_j) \leqslant h_C(\theta_k) + h_C(\theta_j); \tag{6}$$
   (b) *если, — возможно, после перенумерации, — разность* $\theta_2 - \theta_1$ *не кратна* π, *то справедливо неравенство*
$$\begin{aligned} &h_{S_1}(\theta_1)\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} + h_{S_3}(\theta_3) + h_{S_2}(\theta_2)\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} \\ \leqslant\, &h_C(\theta_1)\frac{\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} + h_C(\theta_3) + h_C(\theta_2)\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Доказательства Теорем 1 и 2

Доказательство Теоремы 1. Импликация 1⇒2 очевидна.

Для доказательства импликации 2⇒1 для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, обозначим через C_a замкнутое полупространство, содержащее C и ограниченное опорной гиперплоскостью к выпуклому множеству C в направлении a, т. е.
$$C_a := \{x \colon \langle x, a\rangle \leqslant H_C(a)\}.$$
Здесь $C_a = C_{a'}$, если вектора a и a' сонаправлены, т. е. $a = \alpha a'$ при некотором $\alpha > 0$. Рассмотрим семейство полупространств $\mathcal{C} := \bigl\{C_a \colon a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\bigr\}$, где пересечение $C = \bigcap_{a\neq 0} C_a$ ограничено. Утверждение 2 Теоремы 1 означает, что для любого набора $n+1$ множеств $S_1, \dots, S_{n+1}$ из семейства $\mathcal{S}$ и любого набора $n+1$ замкнутых полупространств $C_{a_1}, \dots C_{a_{n+1}}$ найдется вектор x, для которого каждый сдвиг $S_k + x$ содержится в замкнутом полупространстве C_{a_k} при всех $k = 1, \dots, n+1$, т. е. пересечение
$$\bigcap_{k=1}^{n+1} (S_k \overset{*}{-} C_{a_k})$$
геометрических разностей $S_k \overset{*}{-} C_{a_k}$ непусто. Тогда [1, Теорема 1 о покрытиях сдвигами, Замечание 2, импликация (CS)⇒(T)] влечет за собой справедливость и импликации 2⇒1 Теоремы 1.

Для доказательства эквивалентности 2⇔3 перепишем утверждение 2 в виде системы $n+1$ линейных неравенств. Утверждение 2 по Предложению 1 эквивалентно бесконечной серии неравенств
$$\langle a, x\rangle + H_{S_k}(a) \leqslant H_{C_{a_k}}(a) \ \text{ при всех } a \in \mathbb{R}^n,\ k = 1, \dots, n+1. \tag{8}$$

[1] Под треугольником понимаем также и невырожденный отрезок (только одна сторона нулевой длины), и точку (все стороны нулевой длины, а вершины совпадают), и фигуру, ограниченную двумя параллельными прямыми и пересекающей их прямой (одна вершина — точка ∞, две стороны бесконечной длины).

Но по построению замкнутых полупространств C_{a_k} для всех векторов a, не сонаправленных с a_k, имеем $H_{C_{a_k}}(a) = +\infty$. Следовательно, бесконечная система неравенств (8) равносильна конечной системе $n+1$ линейных неравенств

$$\langle a_k, x\rangle + H_{S_k}(a_k) \leqslant H_{C_{a_k}}(a_k) \text{ при всех } a_k \in \mathbb{R}^n,\ k = 1, \dots, n+1,$$

или иначе, в более традиционной записи,

$$\langle a_k, x\rangle - \big(H_{C_{a_k}}(a_k) - H_{S_k}(a_k)\big) \leqslant 0 \text{ при всех } a_k \in \mathbb{R}^n,\ k = 1, \dots, n+1. \tag{9}$$

Совместность такой уже конечной системы линейных неравенств (9) (при любом фиксированном наборе векторов $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$) по известной Теореме Александрова–Фань-Цзи [9, Теорема 2.3] эквивалентна утверждению: *для любого набора $n+1$ чисел $p_1, \dots, p_{n+1} \geq 0$ при условии*

$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k a_k = 0$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k \big(H_{S_k}(a_k) - H_C(a_k)\big) \leqslant 0.$$

Последнее эквивалентно высказыванию 3 доказываемой Теоремы.

Возвращаясь к конечной системе $n+1$ линейных неравенств (9) (при любом фиксированном наборе векторов $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$) по критерию совместности С. Н. Черникова [9, Теорема 1.5] для конечных систем линейных неравенств в обозначениях и соглашениях (2)–(3), система (9) совместна тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{k_1 j_1} & \cdots & a_{k_1 j_r} & H_C(a_{k_1}) - H_{S_{k_1}}(a_{k_1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k_r j_1} & \cdots & a_{k_r j_r} & H_C(a_{k_r}) - H_{S_{k_r}}(a_{k_r}) \\ a_{k j_1} & \cdots & a_{k j_r} & H_C(a_k) - H_{S_k}(a_k) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n+1,$$

что совпадает с неравенством (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Легко видеть, что утверждения 1 и 2 — это в точности утверждения 1 и 2 Теоремы 1. Для того чтобы получить утверждение 3 Теоремы 2, запишем утверждение 3 Теоремы 1 для $n = 2$ с учетом (5) в виде: *для любого набора трех множеств $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ и для любых наборов трех чисел $a_1 = t_1 e^{i\theta_2}, a_2 = t_2 e^{i\theta_2}, a_3 = t_3 e^{i\theta_3} \in \mathbb{C}$, где $t_1, t_2, t_3 > 0$, и $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ при условии*

$$p_1 t_1 e^{i\theta_1} + p_2 t_2 e^{i\theta_2} + p_3 t_3 e^{i\theta_3} = 0$$

выполнено неравенство

$$p_1 t_1 h_{S_1}(\theta_1) + p_2 t_2 h_{S_2}(\theta_2) + p_3 t_3 h_{S_3}(\theta_3) \leqslant p_1 t_1 h_C(\theta_1) + p_2 t_2 h_C(\theta_2) + p_3 t_3 h_C(\theta_3).$$

Положив $q_1 = p_1 t_1, q_2 = p_2 t_2, q_3 = p_3 t_3$, с учетом положительной однородности (1) убеждаемся, что последнее утверждение эквивалетно утверждению 3 Теоремы 2.

Докажем теперь, что утверждение 4 Теоремы 1 при $n = 2$ в точности совпадает с утверждением 4 Теоремы 2.

Три вектора $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ из (2) можно рассматривать как три комплексных числа

$$\begin{cases} a_1 := & t_1 e^{i\theta_1} = t_1 \cos\theta_1 + i \cdot t_1 \sin\theta_1, \quad t_1 > 0, \\ a_2 := & t_2 e^{i\theta_2} = t_2 \cos\theta_2 + i \cdot t_2 \sin\theta_2, \quad t_2 > 0, \\ a_3 := & t_3 e^{i\theta_3} = t_3 \cos\theta_3 + i \cdot t_3 \sin\theta_3, \quad t_3 > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Ранг рассматривается над полем $\mathbb{R}$.

Случай ранга $r = 1$. В этом случае радиус-векторы точек сонаправлены или противоположно направлены. В случае, когда все радиус-векторы сонаправлены, все шесть разностей $\theta_j - \theta_k$, $j, k = 1, 2, 3$, $j \neq k$, кратны 2π, обе части неравенства (4) равны нулю в силу 2π-периодичности функции (5), и неравенство (4) автоматически выполнено. Пусть теперь хотя бы два радиус-вектора противоположно направлены. Для определенности допустим, что это a_1 и a_2, т. е. $\theta_2 - \theta_1$ кратно π, но не кратно 2π, и, опять-таки для определенности, $\Delta = t_1 \cos\theta_1 \neq 0$. Тогда (4) перепишется в виде

$$\frac{1}{t_1\cos\theta_1}\begin{vmatrix} t_1\cos\theta_1 & H_{S_1}(t_1e^{i\theta_1}) \\ t_k\cos\theta_k & H_{S_k}(t_ke^{i\theta_k})\end{vmatrix} \leqslant \frac{1}{t_1\cos\theta_1}\begin{vmatrix} t_1\cos\theta_1 & H_C(t_1e^{i\theta_1}) \\ t_k\cos\theta_k & H_C(t_ke^{i\theta_k})\end{vmatrix},$$

где $k = 2, 3$, или с учетом (5)

$$\frac{1}{\cos\theta_1}\begin{vmatrix} \cos\theta_1 & h_{S_1}(\theta_1) \\ \cos\theta_k & h_{S_k}(\theta_k)\end{vmatrix} \leqslant \frac{1}{\cos\theta_1}\begin{vmatrix} \cos\theta_1 & h_C(\theta_1) \\ \cos\theta_k & h_C(\theta_k)\end{vmatrix}. \tag{11}$$

Если $\theta_3 - \theta_1$ кратно 2π, то обе части последнего неравенства равны нулю и оно автоматически выполнено. Когда разность $\theta_k - \theta_1$ кратна π, но не 2π, то $\cos\theta_k = -\cos\theta_1$. Таким образом, в этом случае из (11) следует

$$h_{S_k}(\theta_k) - \frac{\cos\theta_k}{\cos\theta_1}h_{S_1}(\theta_1) \leqslant h_C(\theta_k) - \frac{\cos\theta_k}{\cos\theta_1}h_{S_1}(\theta_1). \tag{12}$$

Отсюда и получаем неравенство вида (6) с $j = 1$, а в силу произвола в выборе S_1, S_2, S_3 в левой части (12) вместо S_k и S_1 можем ставить любые из множеств S_1, S_2, S_3. Аналогично поступаем, если $\cos\theta_1 = 0$, но используем $\sin\theta_1 \neq 0$. Перебор остальных случаев для $r = 1$ сводится к перенумерации чисел и множеств. Таким путём получаем п. 4(a).

Случай ранга $r = 2$. Пусть два радиус-вектора точек из (10) линейно независимы — для определенности a_1 и a_2. Это означает, что

$$\Delta := \begin{vmatrix} t_1\cos\theta_1 & t_2\sin\theta_2 \\ t_1\cos\theta_1 & t_2\sin\theta_2\end{vmatrix} = t_1t_2\sin(\theta_2-\theta_1) \neq 0.$$

При этом неравенство (4) запишется в виде

$$\frac{1}{t_1t_2\sin(\theta_2-\theta_1)}\begin{vmatrix} t_1\cos\theta_1 & t_1\sin\theta_1 & t_1h_{S_1}(\theta_1) \\ t_2\cos\theta_2 & t_2\sin\theta_2 & t_2h_{S_2}(\theta_2) \\ t_3\cos\theta_3 & t_3\sin\theta_3 & t_3h_{S_3}(\theta_3)\end{vmatrix}$$
$$\leqslant \frac{1}{t_1t_2\sin(\theta_2-\theta_1)}\begin{vmatrix} t_1\cos\theta_1 & t_1\sin\theta_1 & t_1h_C(\theta_1) \\ t_2\cos\theta_2 & t_2\sin\theta_2 & t_2h_C(\theta_2) \\ t_3\cos\theta_3 & t_3\sin\theta_3 & t_3h_C(\theta_3)\end{vmatrix},$$

или

$$\frac{1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & h_{S_1}(\theta_1) \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & h_{S_2}(\theta_2) \\ \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & h_{S_3}(\theta_3)\end{vmatrix} \leqslant \frac{1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & h_C(\theta_1) \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & h_C(\theta_2) \\ \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & h_C(\theta_3)\end{vmatrix}$$

Отсюда, разлагая два определителя по последним столбцам, получаем (7), что завершает доказательство Теоремы 2.

3. Неограниченное выпуклое замкнутое множество C

3.1. Случай $n \geq 1$. В определенных достаточно простых ситуациях аналоги Теорем 1 и 2 можно установить и для неограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^n$. Напомним [1, Определение 1], что ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называем *направлением звёздости* для множества $C \subset \mathbb{R}^n$ (относительно бесконечности), или *направлением рецессии,* если для любой точки $c \in C$ луч $r_y(c) := \{c + ty \colon t \geq 0\}$ содержится в C. Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называется *направлением* *линейности*, если как y, так и противоположный ему вектор $-y$ — направления звёздости для множества C, т. е. для каждой точки $c \in C$ прямая

$$l_y(c) := \{c + ty \colon t \in \mathbb{R}\} = r_y(c) \cup \bigl(r_{-y}(c)\bigr) = l_{-y}(c) \tag{13}$$

содержится в C. Множество C *полиэдрально,* если C — пересечение конечного числа замкнутых полупространств, определяемых *конечной* системой линейных неравенств вида

$$\langle a, x\rangle - b \leqslant 0 \textit{ при некоторых } a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

При этом сами полупространства, определяемые через (14), называем *определяющими полупространствами* полиэдрального множества C.

Теорема 3 (для неограниченных выпуклых замкнутых множеств)**.** *Пусть C — выпуклое неограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}$ — семейство множеств из $\mathbb{R}^n$, а S — объединение всех множеств из $\mathcal{S}$. Допустим, что семейство $\mathcal{S}$ конечно, т. е.* $\operatorname{card} \mathcal{S} < \infty$*, а множество C полиэдральное или каждое направление звёздости для C — направление линейности для C. Тогда попарно эквивалентны следующие четыре утверждения:*

1. *некоторый сдвиг множества S содержится в C;*
2. *для любого набора $n+1$ множеств $S_1, \dots, S_{n+1}$ из семейства $\mathcal{S}$ и любого набора $n+1$ замкнутых полупространств (только определяющих, если C полиэдральное) $C_1, \dots C_{n+1}$, содержащих C и ограниченных опорными гиперплоскостями к выпуклому множеству C, найдется вектор x, для которого каждый сдвиг $S_k + x$ содержится в замкнутом полупространстве C_k при всех $k = 1, \dots, n+1$;*
3. *выполнено утверждение* 3 *Теоремы* 1*;*
4. *выполнено утверждение* 4 *Теоремы* 1.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ — конечное семейство всех определяющих полупространств, когда C — полиэдральное множество, или, в противном случае, семейство всех замкнутых полупространств, содержащих C и ограниченных опорными гиперплоскостями к выпуклому множеству C. Применяя [1, Теорема 1 о покрытиях сдвигами, условие (F)], при условии конечности (C — полиэдральное множество, семейство $\mathcal{S}$ конечно) из эквивалентности (ST)$\Leftrightarrow$(T) в [1, Теорема 1] следует эквивалетность 1$\Leftrightarrow$2. При условии на направления звёздости пользуемся [1, Теорема 1 о покрытиях сдвигами, условие (d) с $\operatorname{card} \mathcal{S} < \infty$], и вновь из эквивалентности (ST)$\Leftrightarrow$(T) в [1, Теорема 1] следует эквивалетность 1$\Leftrightarrow$2. Остальная часть доказательства (эквивалентности 2$\Leftrightarrow$3 и 2$\Leftrightarrow$4 Теоремы 3) повторяет без особых изменений доказательство аналогичных эквивалентностей Теоремы 1. □

3.2. Плоский случай. Напомним, что *шириной* $B_S(\theta)$ (см. [10, **33**], [11, 4.1.1], [12, гл. I, § 4]) произвольного множества $S \subset \mathbb{C}$ в направлении $\theta \in \mathbb{R}$ называется расстояние между двумя опорными прямыми к S, ортогональными радиус-вектору точки $e^{i\theta}$. В терминах опорной функции

$$B_S(\theta) = h_S(\theta) + h_S(\theta + \pi) = H_S(e^{i\theta}) + H_S(-e^{i\theta}).$$

Наименьшая ширина $b_S := \inf_{\theta \in \mathbb{R}} B_S(\theta)$ называется *широтой* [12, гл. I, § 4] или *толщиной* [11, 4.1.1] множества S. Далее, если $e^{i\theta}$ — направление звёздости для выпуклого множества $C \subset \mathbb{C}$, то число $\theta \in \mathbb{R}$ также удобно называть направлением звёздости. В плоском случае так и будем понимать направление звёздости. В таком понимании число θ — направление линейности, если направлениями звёздости являются одновременно и θ, и $\theta + \pi$. Если каждое направление звёздости выпуклого неограниченного замкнутого множества $C \subset \mathbb{C}$ есть направление линейности, то это либо пустое множество, либо вся комплексная плоскость, либо полоса конечной широты, т. е. в любом случае это C — полиэдральное множество, или выпуклый многоугольник в широком смысле (соответственно либо без вершин и сторон, либо одноугольник с вершиной в ∞ и стороной нулевой длины, либо двуугольник с вершинами в ∞ и с двумя сторонами бесконечной длины). Таким образом, в Теореме 3 условие на направления звёздости множества C вписывается в случай его полиэдральности, и Теорема 3 при $n=2$ звучит короче:

Теорема 4 (для неограниченных выпуклых множеств $C\subset\mathbb{C}$)**.** *Пусть C — выпуклый неограниченный замкнутый многоугольник в $\mathbb{C}$ (в широком смысле, с конечным числом сторон, среди которых могут быть и стороны бесконечной длины, т. е. лучи или прямые), $\mathcal{S}$ — конечное семейство множеств из $\mathbb{C}$, а S — объединение всех множеств из семейства $\mathcal{S}$. Тогда попарно эквивалентны следующие четыре утверждения:*

1. *некоторый сдвиг множества S содержится в C;*
2. *для любого набора множеств S_1,S_2,S_3 из семейства $\mathcal{S}$ и любого замкнутого треугольника (в широком смысле, со сторонами, определяющими полиэдральное множество C) найдется точка $z\in\mathbb{C}$, для которой сдвиги S_k+z, $k=1,2,3$, содержатся в этом треугольнике;*
3. *выполнено утверждение* 3 *Теоремы* 2*;*
4. *выполнено утверждение* 4 *Теоремы* 2*.*

Но есть немало ситуаций, когда возможны содержательные утверждения либо в более простой форме, либо для не полиэдрального неограниченного выпуклого множества C. Некоторые из них использовались, иногда в неявной форме, в работах [13], [14, § 7], [15, § 4] (см. также [16, пп. 3.2.1–3.2.3]) при исследовании полноты экспоненциальных систем в пространствах функций на неограниченных выпуклых множествах.

Для выпуклого множества $C\subset\mathbb{C}$ *дугой рецессивности,* или *звёздости* (относительно бесконечности), называем дугу единичной окружности с центром в нуле, образованную пересечением этой единичной окружности с множеством всех направлений звёздости для C [2, гл. II, § 8]. Дугу звёздости обозначаем как 0^+C. Множество C ограничено тогда и только тогда, когда дуга звёздости — пустое множество [2, гл. II, Теорема 8.4]. Если дуга звёздости выпуклого множества C содержит дугу раствора $>\pi$, то $C=\mathbb{C}$. Для произвольного множества $S\subset\mathbb{C}$ также определим дугу звёздности $0^+S:=0^+\operatorname{co}S$.

Пусть $S\subset\mathbb{C}$. Определим *функции срезанных верхней и нижней ширины* множества S относительно точки s в направлении $\theta=0$ по правилу

$$\begin{cases}W_S^{\uparrow}(x;s):=\sup\{\operatorname{Im}z-\operatorname{Im}s\colon z\in S,\operatorname{Im}z\geq\operatorname{Im}s,\operatorname{Re}z=x\}, & x\in\mathbb{R},\\ W_S^{\downarrow}(x;s):=\sup\{\operatorname{Im}s-\operatorname{Im}z\colon z\in S,\operatorname{Im}z\leqslant\operatorname{Im}s,\operatorname{Re}z=x\}, & x\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{15}$$

где, как обычно, $\sup\varnothing:=-\infty$ для пустого подмножества $\varnothing\subset[-\infty,+\infty]$.

Для *неограниченного выпуклого множества* $C\subset\mathbb{C}$, звёздного в направлении $\theta=0$, определения функций $W_C^{\uparrow}(\cdot;c)$ и $W_C^{\downarrow}(\cdot;c)$ относительно точки $c\in C$ в направлении $\theta=0$ иллюстрирует рис. 1.

Теорема 5. *Пусть $S\subset\mathbb{C}$, C — выпуклое множество в $\mathbb{C}$.*

1. *Если C имеет хотя бы два направления звёздости $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$ и разность $\theta_1-\theta_2$ не кратна π, а S ограничено, то некоторый сдвиг множества S содержится в C.*
2. *Если $0<\theta_2-\theta_1\leqslant\pi$ и дуга $\smile(\theta_1,\theta_2):=\{e^{i\theta}\colon\theta_1<\theta<\theta_2\}$, содержится в 0^+C, а также $\smile(\theta_1',\theta_2')\supset0^+S$ и $\theta_1<\theta_1'<\theta_2'<\theta_2$, то некоторый сдвиг множества S содержится в C.*
3. *Если множество C замкнуто и имеет лишь два различных направления звёздости θ_1 и θ_2 с точностью до слагаемого, кратного 2π, а разность $\theta_2-\theta_1$ кратна π, но не кратна 2π, — для определенности рассматриваем $\theta_1=0$ и $\theta_2=\pi$, — то C — горизонтальная полоса конечной толщины $b_C=B_C(\pi/2)$, а некоторый сдвиг множества S содержится в C тогда и только тогда, когда ширина $B_S(\pi/2)$ множества S в направлениии $\pi/2$ не превышает толщины b_C полосы C.*

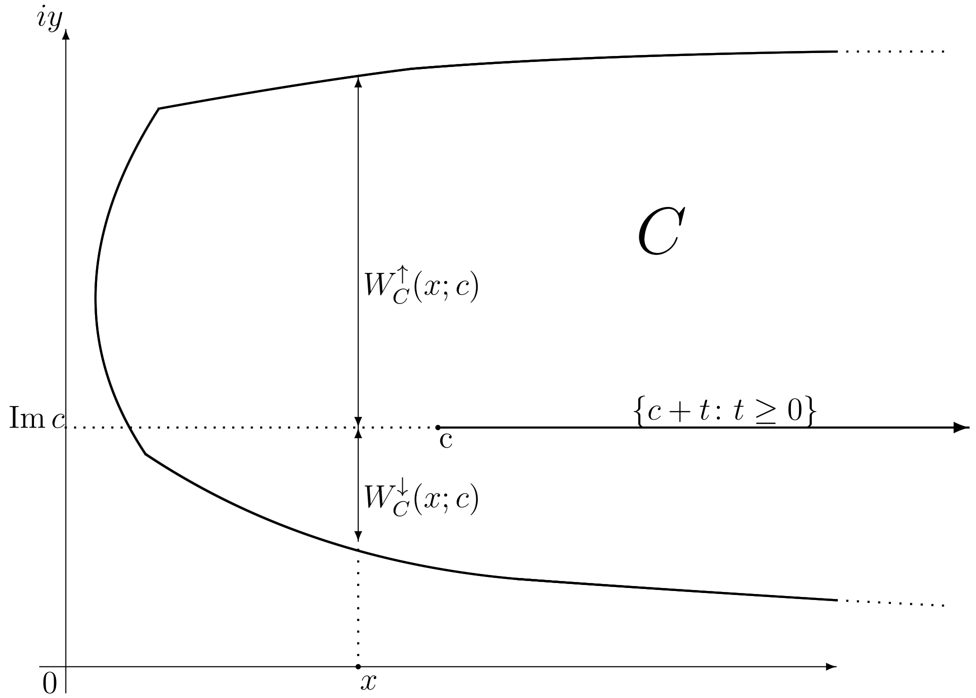

Рис. 1. К определению (15) и доказательству Теоремы 5, часть (4)

4. *Если множество C замкнуто и имеет лишь одно направление звёздости $\theta = 0$ с точностью до слагаемого, кратного 2π, то некоторый сдвиг множества S содержится в C в том и только том случае, когда найдутся числа $s \in \mathbb{C}$, $c \in C$, а также $x_0 \in \mathbb{R}$, для которых выполнены неравенства*

$$\begin{cases} W_S^{\uparrow}(x;s) \leqslant W_C^{\uparrow}(x+x_0;c) & \text{при всех } x \in \mathbb{R}, \\ W_S^{\downarrow}(x;s) \leqslant W_C^{\downarrow}(x+x_0;c) & \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. **1**. По условию первого утверждения Теоремы 5 выпуклое множество C содержит угол ненулевого раствора, куда всегда можно поместить параллельным переносом ограниченное множество S.

2. В условиях утверждения 2 рассмотрим числа θ_1'', θ_2'', удовлетворяющих неравенствам $\theta_1 < \theta_1'' < \theta_1' < \theta_2' < \theta_2'' < \theta_2$. По определению направления звёздости нетрудно видеть, что множество C содержит некоторый сдвиг угла $\angle[\theta_1'', \theta_2''] := \{re^{i\theta}\colon r \geq 0,\ \theta_1'' \leqslant \theta \leqslant \theta_2''\}$, а некоторый сдвиг множества S содержится в угле $\angle[\theta_1', \theta_2'] \subset \angle[\theta_1'', \theta_2'']$. Утверждение 2 доказано.

3. В условиях утверждения 3 для любой точки $c \in C$ замкнутое выпуклое множество C содержит в себе прямую (13) вида $l_0(c)$, т. е. горизонтальную прямую, проходящую через точку c [2, Теорема 8.3], [1, Предложение 1]. Таким свойством на плоскости обладают лишь сама плоскость, полуплоскость с границей, параллельной вещественной оси, и горизонтальная полоса конечной толщины. Но плоскость и полуплоскость имеют более двух (с точностью до числа, кратного 2π) направлений звёздости. Значит C — действительно горизонтальная полоса конечной толщины $b_C = B_C(\pi/2)$. Заключительная часть утверждения 3 о сдвиге множества S теперь очевидна.

4. В условиях утверждения 4 (полезно ориентироваться на рис. 1) докажем достаточность. На первом шаге сдвиг плоскости $\mathbb{C}$ вместе с множеством S на число $c-s$ совмещает точки s и c, а множество S сдвигается в множество $S' := S + (c-s)$, для которого в силу

(16) при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$\begin{cases} W^{\uparrow}_{S'}(x;c) \leqslant W^{\uparrow}_{C}(x+x_0;c) & \text{при всех } x \in \mathbb{R}, \\ W^{\downarrow}_{S'}(x;c) \leqslant W^{\downarrow}_{C}(x+x_0;c) & \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{17}$$

Заметим, что в силу выпуклости C функции срезанных верхней и нижней ширины $W^{\uparrow}_{C}(x,s)$ и $W^{\uparrow}_{C}(x,c)$ возрастают по переменной x в нестрогом смысле: $\bigl(x_1 \leqslant x_2\bigr) \implies \bigl(W^{\uparrow}_{C}(x_1,c) \leqslant W^{\uparrow}_{C}(x_2,c)\bigr)$ и аналогично для $W^{\downarrow}_{C}(\cdot,c)$. Поэтому, осуществив еще один сдвиг множества $S' = S + (c-s)$ на достаточно большое значение $x_0' \geq x_0$ в силу условия (17) поместим сдвиг $S + (c-s) + x_0'$ в C.

Необходимость (16) при некоторых $s \in \mathbb{C}$, $c \in C$, $x_0 \in \mathbb{R}$ достаточно очевидна ввиду определения (15) функций срезанных верхней и нижней ширины. Теорема 5 доказана. $\square$

Пример 1. Этот пример показывает, что в утверждении 4 Теоремы 5 урезанные верхние и нижние ширины множеств S и C нельзя заменить просто на длины сечений

$$W_S(x) := \sup\{|\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2| \colon z_1, z_2 \in S,\ \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = x\}$$

и $W_C(x)$ даже для выпуклого множества S. Достаточно рассмотреть множества

$$\begin{aligned} S &:= \{x+iy \in \mathbb{C} \colon x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{arctg} x\}, \\ C &:= \{x+iy \in \mathbb{C} \colon x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ -\operatorname{arctg} x \leqslant y \leqslant 0\}, \end{aligned}$$

которые имеют единственное (с точностью до числа, кратного 2π) направление звёздости $\theta = 0$ и толщину $\pi/2$. При этом $W_S(x) = W_C(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x \geq 0$ и $W_S(x) = W_C(x) \equiv -\infty$ при $x < 0$. Но никакой сдвиг S не содержится в C.

4. Неполнота систем экспонент и целые функции экспоненциального типа

В этом параграфе демонстрируется связь предыдущих результатов о сдвигах множеств с неполнотой систем экспонент в пространствах функций.

4.1. Общий случай $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство над полем $\mathbb{C}$, наделённое евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{2n}$, т. е. $\mathbb{C}^n$ отождествляется с $\mathbb{R}^{2n}$: каждой точке

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad z_k = x_k + iy_k, \quad x_k, y_k \in \mathbb{R}$$

сопоставляется точка $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$; $\overline{z} := (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n) \in \mathbb{C}^n$. Для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем

$$\langle \lambda, z \rangle := \lambda_1 z_1 + \dots \lambda_n z_n \in \mathbb{C}, \quad |z| := \sqrt{\langle z, \overline{z} \rangle}$$

— норма в $\mathbb{C}^n$. Для окрытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ через $\operatorname{Hol}(\Omega)$ обозначаем пространство всех голоморфных в Ω функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах, а для компакта $C \subset \mathbb{C}^n$ через $\operatorname{CHol}(C)$ — банахово пространство функций $f \colon C \to \mathbb{C}$, непрерывных на C и голоморфных во внутренности $\operatorname{int} C$, если она непустая, со стандартной нормой

$$\|f\|_{\operatorname{CHol}(C)} := \sup\bigl\{|f(z)| \colon z \in \mathbb{C}\bigr\}.$$

Пространство линейных непрерывных функционалов на $\operatorname{CHol}(C)$ образовано комплекснозначными мерами Радона μ с носителем $\operatorname{supp} \mu \subset C$ [17, Appendix A]. Такая мера для каждого функционала неединственна. Более того, при $n > 1$ нельзя даже утверждать, что для заданного линейного непрерывного функционала на $\operatorname{CHol}(C)$ найдется мера с наименьшим относительно включения носителем, представляющая этот функционал [18, гл. 8]. Характеристической функцией (преобразованием Фурье–Бореля, или Фурье–Лапласа, или Лапласа) функционала-меры μ называют функцию

$$L_\mu(\lambda) := \mu\big(e^{\langle \lambda, \cdot\rangle}\big) = \int e^{\langle \lambda, z\rangle}\, d\mu(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n. \tag{18}$$

Это целая функция экспоненциального типа, т. е.

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \frac{\log|L_\mu(\lambda)|}{|\lambda|} < \infty.$$

Класс всех целых функций экспоненциального типа обозначаем $\operatorname{Ent}[1,\infty)$. Если характеристическая функция L_μ ненулевая, то функционал, порожденный мерой μ на $\operatorname{CHol}(C)$, ненулевой.

Пусть $\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Функцией-дивизором* на $\mathbb{C}^n$ называем отображение $\Lambda\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{Z}_+$ и носитель дивизора, как обычно, обозначаем $\operatorname{supp}\Lambda \subset \mathbb{C}^n$. Пусть

$$p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad z^p := \prod_{k=1}^n z_k^{p_k}.$$

В этих обозначениях каждому дивизору Λ на $\mathbb{C}^n$ (см. [16, гл. 4]) сопоставляется система (кратных) экспонент на $\mathbb{C}^n$

$$\operatorname{Exp}^\Lambda := \{z^p e^{\langle\lambda, z\rangle}\colon z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \operatorname{supp}\Lambda, p_1 + \dots + p_n \leqslant \Lambda(\lambda) - 1\}.$$

Функции $L \in \operatorname{Ent}[1,\infty)$ можно сопоставить *дивизор нулей* $\operatorname{Zero}_L\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{Z}_+$, который в каждой точке $z \in \mathbb{C}^n$ равен кратности нуля функции L в точке z. Для произвольного дивизора Λ пишем далее $\Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_{L_\mu}$, если $\Lambda(\lambda) \leqslant \operatorname{Zero}_{L_\mu}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Давно известно ([16, Теорема 1.1.2]), что если найдется мера μ с $\operatorname{supp}\mu \subset C$ и с ненулевой характеристической функцией L_μ вида (18), для которой $\Lambda(\lambda) \leqslant \operatorname{Zero}_{L_\mu}(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, то система[1] $\operatorname{Exp}^\Lambda$ *неполна* в пространстве $\operatorname{CHol}(C)$.

Комплекснозначная мера μ, заданная на $\mathbb{C}^n$, *сосредоточена* на множестве $S \subset \mathbb{C}^n$, если для любого $A \subset \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $\mu(A) = \mu(A \cap S)$.

Теорема 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$, а $\mu_1, \mu_2, \dots$ — не более чем счетная последовательность комплекснозначных мер Радона, сосредоточенных соответственно на множествах $S_1, S_2, \dots \subset \mathbb{C}^n$. Если для семейства $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$ выполнено хотя бы одно из четырех эквивалентных утверждений Теоремы 1, ряд $\sum_{k\geq 1}\mu_k$ слабо* сходится (на пространстве непрерывных функций) к мере μ и*

$$\sum_{k\geq 1} \mu_k(\mathbb{C}^n) \neq 0, \tag{19}$$

то в обозначениях (18) для любого дивизора $\Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_{L_\mu}$ система экспонент $\operatorname{Exp}^\Lambda$ неполна в пространстве $\operatorname{CHol}(C)$.

Доказательство. При слабой* сходимости ряда $\sum_{k\geq 1}\mu_k$ к мере μ носитель меры μ содержится в замыкании объединения $S = \bigcup_{k\geq 1} S_k$, и нетрудно показать, что в обозначениях (18) ряд

$$\sum_{k\geq 1} L_{\mu_k} = L_\mu \tag{20}$$

[1] Система векторов в топологическом векторном пространстве неполна, если замыкание ее линейной оболочки не совпадает с пространством.

сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}^n$ к функции $L_\mu \in \operatorname{Ent}[1,\infty)$, для которой ввиду (19) имеем $L_\mu(0)\neq 0$. Если сдвиг $C+a$ множества C покрывает все S_k одновременно, то такой же сдвиг $C+a$ покрывает и $\operatorname{cl} S$. Тогда ненулевая функция

$$e^{\langle -a,\cdot\rangle}\cdot L_\mu \in \operatorname{Ent}[1,\infty) \tag{21}$$

— характеристическая функция меры μ_a, определенной по правилу $\mu_a(A)=\mu(A-a)$, где A — произвольное борелевское множество в $\mathbb{C}^n$, а мера μ_a с носителем $\operatorname{supp}\mu_a\subset C$ порождает ненулевой функционал. Этот функционал аннулирует систему экспонент с дивизором показателей, совпадающим с дивизором нулей функции (21), который равен $\operatorname{Zero}_{L_\mu}$ и, тем более, аннулирует систему экспонент $\operatorname{Exp}^\Lambda$, поскольку $\Lambda\leqslant \operatorname{Zero}_{L_\mu}$. Следовательно, система $\operatorname{Exp}^\Lambda$ неполна в $\operatorname{CHol}(C)$ [16, Теорема 1.1.2]. □

Замечание 1. При произвольном $\lambda_0\in\mathbb{C}^n$ условие (19) можно заменить на

$$\sum_{k\geq 1}\int e^{\langle \lambda_0,z\rangle}\,d\mu_k(z)\neq 0.$$

Можно сформулировать подобную Теореме 6, но несколько более слабую теорему безотносительно к мерам только в терминах целых функций экспоненциального типа и их радиальных регуляризованных индикаторов роста.

Прежде всего отметим, что верно и обратное к (18): если $L\in\operatorname{Ent}[1,\infty)$, то для L найдется (неединственная) мера μ с компактным носителем в $\mathbb{C}^n$, для которой $L=L_\mu$ в обозначениях (18). Для каждой функции $L\in\operatorname{Ent}[1,\infty)$ определяется полунепрерывная сверху функция [18, гл. I, § 8]

$$h_r^*(z,L):=\limsup_{z'\to z}\ \limsup_{t>0,t\to+\infty}\frac{\log|L(tz')|}{t}\,, \tag{22}$$

называемая *радиальным регуляризованным индикатором роста* при порядке 1 целой функции L. Если для выпуклого компакта $C\subset\mathbb{C}^n$ с опорной функцией H_C (отождествляем $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$) и функции $L\in\operatorname{Ent}[1,\infty)$ имеет место неравенство $h_r^*(\overline{z},L)\leqslant H_C(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, то по Теореме Мартино–Эренпрайса–Пойа [18, Теорема 8.9], [19, Теорема 12.3] для любой области $\Omega\supset C$ функция L — характеристическая функция некоторой меры μ с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu\subset\Omega$.

Теорема 7. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, C — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$,*

$$L_1,L_2,\dots\in\operatorname{Ent}[1,\infty) \tag{23}$$

— конечная последовательность ненулевых функций на $\mathbb{C}^n$ с радиальными регуляризованными индикаторами роста $h_r^*(\cdot,L_k)$, $k=1,2,\dots$, и при каждом k для некоторой непрерывной положительно однородной сублинейной функции на $\mathbb{R}^{2n}$, отождествленном с $\mathbb{C}^n$, т. е. для опорной функции H_{S_k} некоторого выпуклого замкнутого множества S_k, выполнено неравенство $h_r^*(\overline{z},L_k)\leqslant H_{S_k}(z)$ при всех $z\in\mathbb{C}^n$. Если для семейства $\mathcal{S}=\{S_1,S_2,\dots\}$ выполнено хотя бы одно из четырех эквивалентных утверждений Теоремы 1, и

$$\sum_{k\geq 1}L_k=L \tag{24}$$

— ненулевая функция, то для любого дивизора $\Lambda\leqslant\operatorname{Zero}_L$ система $\operatorname{Exp}^\Lambda$ неполна в пространстве $\operatorname{Hol}(\Omega)$ для любой области $\Omega\supset C$.

Доказательство. Пусть сдвиг $C+a$ выпуклого компакта C покрывает все S_k, а область $\Omega+a$ содержит $C+a$. Тогда по Теореме Мартино–Эренпрайса–Пойа для некоторой меры μ с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu\subset\Omega+a$ в обозначениях (18) $L=L_\mu$. Следовательно, система экспонент $\operatorname{Exp}^{\operatorname{Zero}_L}$ аннулируется ненулевым функционалом-мерой μ на $\operatorname{Hol}(\Omega+a)$.

Это значит, что система $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ при $\Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_L$ неполна в пространстве $\operatorname{Hol}(\Omega + a)$. Отсюда система $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ неполна в $\operatorname{Hol}(\Omega)$. Теорема доказана. □

Замечание 2. В Теореме 7 последовательность функций в (23) можно считать бесконечной (счетной), но при этом необходимо требовать довольно жесткую сходимость от ряда из (24). Например, достаточно, чтобы такой ряд сходился равномерно на компактах в $\mathbb{C}^n$ и равномерно по N выполнялась оценка

$$\Bigl|\sum_{1\leqslant k\leqslant N} L_k(z)\Bigr| \leqslant M \exp\bigl(H_{\operatorname{co}\bigcup_k S_k}(\overline{z})\bigr), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad M \text{ — постоянная.}$$

Можно усилить Теорему 7 и в другом направлении, а именно: система $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ неполна в пространстве $\operatorname{Hol}(C)$ функций, голоморфных в окрестности компакта C, с естественной топологией индуктивного предела (см. [16], [18], [19]).

4.2. Плоский случай $n = 1$. При $n = 1$ несколько упрощается трактовка отдельных объектов, участвующих в формулировках Теорем 6 и 7.

Вместо функции-дивизора уместнее рассматривать не более чем счетную последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{C}$, среди которых могут быть и повторяющиеся, но последовательность Λ не имеет предельных точек в $\mathbb{C}$. Последовательности Λ сопоставляется система (кратных) экспонент

$$\operatorname{Exp}^{\Lambda} := \{z^p e^{\lambda_k z} \colon z \in \mathbb{C}, 0 \leqslant p \leqslant n_{\Lambda}(\lambda_k) - 1\},$$

где $n_{\Lambda}(\lambda)$ — число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ. Ненулевой функции $L \in \operatorname{Ent}[1,\infty)$ соответствует *последовательность нулей* Zero_L, перенумерованная с учетом кратности. При этом $\Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_L$ означает $n_{\Lambda}(\lambda) \leqslant n_{\operatorname{Zero}_L}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. В такой трактовке надо заменить в заключении Теоремы 6 фразу «*... для любого дивизора* $\Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_{L_\mu} \dots$» на «*... для любой последовательности* $\Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_{L_\mu} \dots$».

Что касается Теоремы 7, вместо радиального регуляризованного индикатора роста при порядке 1 целой функции $L \in \operatorname{Ent}[1,\infty)$ можно рассматривать индикатор роста

$$h(\theta, L) := \limsup_{t>0, t\to+\infty} \frac{\log|L(te^{i\theta})|}{t}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{25}$$

— непрерывная 2π-периодическая тригонометрически выпуклая функция [7], [8], [16], которая является опорной функцией некоторого выпуклого компакта (индикаторной диаграммы), или опорной функцией $h_S(\theta) \equiv h(-\theta, L)$ сопряженной диаграммы S функции L. Тогда Теорема 7 переформулируется как

Теорема 8. *Пусть C — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, (23) — конечная последовательность ненулевых функций на $\mathbb{C}$ соответственно с сопряженными диаграммами S_k, $k = 1, 2, \dots$. Если для семейства множеств $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$ выполнено хотя бы одно из четырех эквивалентных утверждений Теоремы 2 и функция L из (24) — ненулевая функция, то для любой последовательности $\Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_L$ система $\operatorname{Exp}^{\Lambda}$ неполна в $\operatorname{Hol}(\Omega)$ для любой области $\Omega \supset C$.*

Замечание 3. По отношению к Теореме 8 остается в силе Замечание 2.

Автор глубоко признателен А. С. Кривошееву за полезные обсуждения отдельных вопросов, касающихся целых функций многих переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабибуллин Б.Н. *Теорема Хелли и сдвиги множеств.* I // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 3. С. 98–111.
2. Рокафеллар Р.Т. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.
3. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* М.: Наука. 1985.
4. Тихомиров В.М. *Выпуклый анализ* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Математический ин-т им.В.А. Стеклова РАН. Москва. 1987. Т. 14. С. 5–101.
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения.* М.: Эдиториал УРСС. 2000.
6. Половинкин Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.* М.: Физматлит. 2004.
7. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Физматгиз. 1956.
8. B.Ya. Levin *Lectures on entire functions.* Transl. Math. Monographs. Providence RI. Amer. Math. Soc. V. 150. 1996.
9. Черников С.Н. *Линейные неравенства.* М.: Наука. 1968.
10. Боннезен Т., Фенхель В. *Теория выпуклых тел.* М.: Фазис. 2002.
11. Хадвигер Г. *Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.* М.: Наука. 1966.
12. Сантало Л. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности.* М.: Наука. 1983.
13. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 2. С. 270–273.
14. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Матем. сборник. 1989. Т. 180, № 5. С. 706–719.
15. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа с заданными нулями вдоль прямой* // Analysis Math. 1991. Т. 17, № 3. С. 239–256.
16. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности* (издание четвертое, дополненное). Уфа: РИЦ БашГУ. 2012.
17. T. Ransford *Potential Theory in the Complex Plane.* Cambridge: Cambridge University Press. 1995.
18. Лелон П., Груман Л. *Целые функции многих комплексных переменных* М.: Мир. 1989.
19. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982.

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru