Б. Н. Хабибуллин, Теорема Хелли и сдвиги множеств. I, *Уфимск. матем. журн.*, 2014, том 6, выпуск 3, 98–111

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 98-111.

УДК 514.17 : 517.547.2

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И СДВИГИ МНОЖЕСТВ. I

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Мотивировка рассматриваемых геометрических вопросов — исследование условий, при которых экспоненциальная система функций с показателями, являющимися нулями некоторой суммы (конечного или бесконечного) семейства целых функций экспоненциального типа, неполна в пространствах функций, голоморфных внутри компакта C и одновременно непрерывных на компакте. Когда C — выпуклый компакт, эта задача оказалась тесно связанной с Теоремой Хелли о пересечении выпуклых множеств в следующей трактовке. Пусть C и S — два множества в конечномерном евклидовом пространстве, заданные соответственно как пересечения и как объединения некоторых подмножеств. Даются критерии, при которых некоторый параллельный перенос (сдвиг) множества C полностью покрывает (соответственно содержит, соответственно пересекает) множество S. Эти критерии и подобные им формулируются в терминах геометрических, алгебраических и теоретико-множественных разностей подмножеств, порождающих C и S.

Ключевые слова: теорема Хелли, неполнота систем экспонент, выпуклость, сдвиг, геометрическая, алгебраическая и теоретико-множественная разности.

Mathematics Subject Classification: 52A35, 52A20

1. Введение

1.1. Источником наших исследований послужила следующая задача, которую пока в целях простоты изложения обсуждаем в этом пункте только в одномерном комплексном упрощенном варианте. Подробное изложение, включая многомерную ситуацию, дано в заключительном разделе второй части работы.

Рассмотрим не более чем счетную последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без точек сгущения в ней, среди которых могут быть и повторяющиеся. Последовательности Λ сопоставляется система (кратных) экспонент

$$\mathrm{Exp}^{\Lambda} := \{z^p e^{\lambda_k z} \colon z \in \mathbb{C}, 0 \leqslant p \leqslant n_\Lambda(\lambda_k) - 1\},$$

где $n_\Lambda(\lambda)$ — число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ. Ненулевой целой функции экспоненциального типа L соответствует *последовательность нулей* Zero_L, перенумерованная с учетом кратности. При этом $\Lambda \leqslant \mathrm{Zero}_L$ означает $n_\Lambda(\lambda) \leqslant n_{\mathrm{Zero}_L}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Индикатор роста

$$h(\theta, L) := \limsup_{t>0, t\to+\infty} \frac{\log|L(te^{i\theta})|}{t}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

— непрерывная 2π-периодическая тригонометрически выпуклая функция [1]–[3], которая является опорной функцией некоторого выпуклого компакта (индикаторной диаграммы), или опорной функцией $h_S(\theta) \equiv h(-\theta, L)$ сопряженной диаграммы S функции L. Пусть

B.N. Khabibullin, Helly's Theorem and shifts of sets. I.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00030-а).

Поступила 25 февраля 2014 г.

теперь C — компакт в $\mathbb{C}$, задана последовательность ненулевых целых функций $\{L_k\}$ экспоненциального типа соответственно с сопряженными диаграммами S_k, $k=1,2,\dots$, сумма которых $\sum_k L_k$ равна целой функции L экспоненциального типа. Если существует сдвиг компакта C, покрывающий все множества семейства $\mathcal{S}=\{S_1,S_2,\dots\}$, и функция L — ненулевая функция, то для любой последовательности $\Lambda\leqslant \mathrm{Zero}_L$ система Exp^{Λ} неполна в пространстве $\mathrm{Hol}(\Omega)$ голоморфных в области Ω функций для любой области $\Omega\supset C$ в естественной топологии равномерной сходимости на компактах. Возникает вопрос: *при каких условиях сдвиг компакта C покрывает объединение сопряженных диаграмм $\bigcup_k S_k$?* Оказалось, что задача поддается различным вариантам решения с помощью Теоремы Хелли, если компакт C — выпуклый. С переспективой дальнейших применений мы рассматриваем случаи, и когда сам компакт C задан как пересечение выпуклых компактов. Ответы даются в терминах геометрических разностей множеств или же в терминах опорных функций. В целях предстоящих приложений, в частности, к теории целых функций вполне регулярного роста, которые мы в настоящей работе пока не затрагиваем, и для полноты изложения рассмотрены также и ситуации, когда вместо геометрических разностей используются алгебраические или теоретико-множественные разности множеств.

Работа разбита на две части, что представляется естественным, поскольку первая часть носит чисто геометрический характер, а вторая часть — более алгебраический и, прежде всего, теоретико-функциональный характер. Результаты работы были частями анонсированы на конференциях [4]–[7].

1.2. Всюду $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел и для $n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{R}^n$ — n-мерное (векторное или точечное аффинное) евклидово пространство с обычным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а его элементы — векторы или точки. Символ 0 обозначает и число нуль, и нулевой вектор, и начало отсчета.

Далее, зачастую не указывая на конкретный источник, пользуемся близкой к общепринятой терминологией, обозначениями и широко известными фактами из [8]–[13]. Так, $\mathrm{A}\times\mathrm{B}:=\{(\alpha,\beta)\colon \alpha\in\mathrm{A},\beta\in\mathrm{B}\}$ — декартово произведение множеств A,B. Для множества S произвольной природы $\operatorname{card}S$ — *мощность* S, т. е. для конечного множества S —*число элементов* в нем. Для $S\subset\mathbb{R}^n$ через $\operatorname{int}S$ и $\operatorname{co}S$ обозначаем *внутренность* и *выпуклую оболочку* множества S. Для $x\in\mathbb{R}^n$ полагаем $|x|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $B(x,r):=\bigl\{y\in\mathbb{R}^n\colon |y-x|<r\bigr\}$ — *открытый шар с центром x радиуса $r\geq 0$.*

Соглашение. *Когда речь идет о выборе набора элементов из множества или наборе множеств из семейства множеств, удобно допускать, что в этом наборе могут быть повторяющиеся соответственно элементы или множества.*

В первой части работы предприняты исследования, продиктованные классической Теоремой Хелли о выпуклых множествах начала XX века, которую в одной из самых простых начальных форм можно напомнить в виде [8, Введение]: *пусть некоторое семейство $\mathcal{S}$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ конечно или каждое множество из него замкнуто и ограничено; тогда, если пересечение любых $n+1$ множеств из $\mathcal{S}$ непусто, то непусто и пересечение всех множеств из* $\mathcal{S}$ (подробнее Теорема Хелли о выпуклых множествах сформулирована ниже в начале раздела 2). Некоторое представление (очень далекое от полного) о необъятном объеме публикаций по Теореме Хелли можно почерпнуть из ссылок и списка литературы статьи. Если обсуждение результата или чьей-либо работы имеются в каких-нибудь обзорах или монографиях, то именно на последние дается ссылка. Здесь мы развиваем в различных направлениях одно из ключевых следствий Теоремы Хелли. Сформулируем его в виде теоремы.

Результат параллельного переноса множества $S\subset\mathbb{R}^n$ будем называть *сдвигом* множества S. Следующее важное следствие теоремы Хелли доказано независимо и в различной степени общности П. Винченцини (1939 г.) и В. Кли (1953 г.), а родственные вопросы рассматривал М. Эдельштейн (1958 г.).

Теорема VKE (Винченцини–Кли–Эдельштейна [8, **2.1**]). *Пусть семейство $\mathcal{S}$ выпуклых множеств конечно или состоит только из компактов, а $C \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое, но, дополнительно, ограниченное и замкнутое, если $\mathcal{S}$ бесконечно. Тогда существование сдвига множества C, который «покрывает всё» (аналогично «пересекает всё», аналогично «содержится во всех») множества из $\mathcal{S}$, полностью обеспечивается существованием такого рода сдвига для каждого набора $n+1$ множеств семейства $\mathcal{S}$.*

2. Теоремы Хелли о выпуклых множествах

Нам потребуется ряд модификаций классической Теоремы Хелли [8]–[13].

Определение 1. Ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называем *направлением звёздности*[1] для множества $C \subset \mathbb{R}^n$ (относительно бесконечности), или *направлением рецессии,* если для любой точки $c \in C$ луч
$$r_y(c) := \{c + ty \colon t \geq 0\} \tag{2}$$
содержится в C. Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называется *направлением линейности*, если как y, так и противоположный ему вектор $-y$ — направления звёздности для множества C, т.е. для каждой точки $c \in C$ прямая
$$l_y(c) := \{c + ty \colon t \in \mathbb{R}\} = r_y(c) \cup \bigl(r_{-y}(c)\bigr) = l_{-y}(c)$$
содержится в C. Множество C *полиэдрально,* если C — пересечение конечного числа замкнутых полупространств, определяемых конечной системой линейных неравенств вида
$$\langle a, x\rangle - b \leqslant 0 \text{ при некоторых } a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Очевидно, для пустого подмножества в $\mathbb{R}^n$ и для самого $\mathbb{R}^n$ любой ненулевой вектор — направление звёздности и линейности. Кроме того, $\varnothing \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ еще и полиэдральны, поскольку $\varnothing$ может рассматриваться как множество решений любой несовместной конечной системы линейных неравенств вида (3), а $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle 0, x\rangle \leqslant 0\}$.

Теорема Хелли (о выпуклых множествах). *Пусть для семейства*
$$\mathcal{C} := \{C_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}, \quad \mathrm{A} \text{ — множество индексов}, \tag{4}$$
выпуклых множеств C_α в $\mathbb{R}^n$ выполнено одно из двух условий:

(f) *множество индексов A конечно* (условие конечности [8, Введение])*;*

(d) *все множества C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, замкнуты* (условие замкнутости) *и для некоторого конечного подмножества $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$ все множества C_α полиэдральны при $\alpha \in \mathrm{A}_0$, а всякое направление звёздности, общее для всех множеств C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, есть направление линейности для множеств C_α при всех $\alpha \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{A}_0$* (условие на направления звёздности [9, Теорема 21.5], [14]).

Если пересечение любого набора $n+1$ множеств (см. Соглашение из Введения) *из этого семейства $\mathcal{C}$ непусто, то и пересечение всех множеств из него непусто.*

Замечание 1. Теорема Хелли о выпуклых множествах имеет место и при следующем более простом, но при этом и более жестком по сравнению с условием (d) ограничении

(b) *все множества C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, замкнуты* (условие замкнутости) *и для некоторого подмножества $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ пересечение $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}'} C_\alpha$ непусто и ограничено* (условие ограниченности [15, Теорема 5], [16, 1.1]).

[1]Можно еще сказать, что любая точка в C «из бесконечности видна в направлении $-y$» (ср. с понятием множества, звёздного относительно точки из этого множества [10, Определение 7.1]). Иначе говорят, что C удаляется в ∞ по направлению y [9, гл. II, § 8].

Это условие — частный случай условия (d), поскольку при выполнении (b) можно выбрать $\mathrm{A}_0 = \varnothing$, а общих направлений звёздности для всех множеств C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, попросту не существует по условию ограниченности. По этой причине версия Теоремы Хелли о выпуклых множествах с ограничением (b) не вошла в основную формулировку Теоремы Хелли.

3. Разности множеств и вспомогательные результаты о геометрической разности

Определение 2. Пусть S, C — произвольные множества в $\mathbb{R}^n$.

Теоретико-множественную разность, или *разность,* этих множеств обозначаем в наиболее распространенной форме $C \setminus S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon x \in C, x \notin S\}$.

Для $\lambda \in \mathbb{R}$ полагаем $\lambda S := \{\lambda s \colon s \in S\}$ — *произведение* S *на число* λ. При этом полагаем $-S := (-1)S$.

Геометрическая сумма, или *сумма Минковского,* множеств S и C совпадает с их *алгебраической*, или *векторной, суммой* и задается как[1]

$$S + C := \{s + c \colon s \in S, c \in C\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

В частности, для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $S + x := S + \{x\} =: x + S$ — *сдвиг*, или параллельный перенос, множества S на вектор x.

Геометрическая разность, или, довольно часто, *разность Минковского* [10, Определение 8.5], этих множеств определяется как

$$C \stackrel{*}{-} S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon S + x \subset C\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где мы используем широко применяемое обозначение[2] Л. С. Понтрягина [17], [18, **§ 2, C.** Геометрическая разность], [13], [19]. В частности, для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $C - x := C \stackrel{*}{-} \{x\} = C + (-x)$ — сдвиг C на $-x$. Тогда $C \stackrel{*}{-} S = \bigcap_{s \in S}(C - s)$.

Алгебраическая, или *векторная, разность* этих множеств, также зачастую называемая, в разногласии с (6), разностью Минковского[3], определяется как

$$C - S := C + (-1)S = \{c - s \colon c \in C, s \in S\} = C + (-S). \tag{7}$$

Отметим, что при $C \neq \varnothing$ и $\operatorname{card} S > 1$, вообще говоря, $C \stackrel{*}{-} S \subset C - S \neq C \stackrel{*}{-} S$ (см. [10, гл. I, § 8, Определение 8.5, Предостережение], [13, Предложение 1.1.1, Замечание 1.1.1]).

Для доказательства основной Теоремы 1 будет частично использована следующая элементарная, но представляющая самостоятельный интерес

Лемма 3.1 (о наследовании геометрической разностью свойств «уменьшаемого»)**.** *Для пары произвольных множеств $S, C \subset \mathbb{R}^n$ если*

[cl] *множество C замкнуто, то и геометрическая разность $C \stackrel{*}{-} S$ замкнута;*
[bd] *C ограничено и $S \neq \varnothing$, то и геометрическая разность $C \stackrel{*}{-} S$ ограничена;*
[co] *множество C выпукло, то и геометрическая разность $C \stackrel{*}{-} S$ выпукла;*
[ds] *y — направление звёздности для C, то y — направление звёздности и для $C \stackrel{*}{-} S$;*
[dl] *y — направление линейности для C, то y — направление линейности и для $C \stackrel{*}{-} S$;*
[ph] *C полиэдрально, то и геометрическая разность $C \stackrel{*}{-} S$ полиэдральна.*

Часть результатов (но не все) этой Леммы при специальном ограничении выпуклости множества C могла бы быть доказана из простого равенства для геометрических разностей $C \stackrel{*}{-} S = C \stackrel{*}{-} \operatorname{co} S$, но мы предпочли прямые доказательства для всех случаев.

---

[1] У некоторых авторов для операции суммы Минковского используется символ $\oplus$.

[2] Распространены и другие обозначения для операции геометрической разности множеств. Так, в [10, Определение 8.5] используется обычный знак минус $-$, символы $\div$ в [20, § 1], [21], [22] или $\stackrel{*}{-}$ в [23, Определение 1] и т. п.

[3] Иногда с использованием для обозначения операции алгебраической разности знака $\ominus$.

Доказательство. [**cl**] Доказано в [19, Теорема 12.3], но мы даём чуть иное доказательство подробнее. Если $C=\varnothing$, то $C \overset{*}{-} S=\varnothing$, когда $S\neq\varnothing$, и $C \overset{*}{-} S=\mathbb{R}^n$, когда и $S=\varnothing$, т. е. $C \overset{*}{-} S$ замкнуто в любом случае. Если же $C\neq\varnothing$, а $x_k\in C \overset{*}{-} S$, $x_k\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$, и существует предел $\lim_{k\to\infty}x_k=x$, то для любого $s\in S$ имеем $s+x_k\in C$ и $s+x=\lim_{k\to\infty}(s+x_k)\in C$ в силу замкнутости множества C. Отсюда $S+x\subset C$, т. е. $x=\lim_{k\to\infty}x_k\in C \overset{*}{-} S$.

[**bd**] Если $C=\varnothing$, то для $S\neq\varnothing$ имеем $C \overset{*}{-} S=\varnothing$ — ограниченное множество. Пусть теперь $C\neq\varnothing$. Тогда $C\subset B(0,r)$ для некоторого $r>0$. Зафиксируем какой-либо элемент $s\in S$. Если $x\in C \overset{*}{-} S$, то $s+x\in B(0,r)$ и $x\in B\bigl(0,r+|s|\bigr)$. Отсюда $C \overset{*}{-} S\subset B\bigl(0,r+|s|\bigr)$ и ограничено ввиду фиксированности r и s.

[**co**] Доказано в [19, Теорема 12.4], но мы доказываем несколько больше (см. ниже (9)). Если $x_1,x_2\in C \overset{*}{-} S$, то $S+x_1\subset C$ и $S+x_2\subset C$, а для любых чисел $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ имеем $\lambda_1S+\lambda_1x_1\subset\lambda_1C$ и $\lambda_2S+\lambda_2x_2\subset\lambda_2C$. Отсюда ввиду включения $(\lambda_1+\lambda_2)S\subset\lambda_1S+\lambda_2S$ и равенства $\lambda_1C+\lambda_2C=(\lambda_1+\lambda_2)C$ при $\lambda_1\cdot\lambda_2\geq 0$ для *выпуклого* C [10, Теорема 8.2] получаем

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1+\lambda_2)S+(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\subset\lambda_1S+\lambda_2S+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=(\lambda_1S+\lambda_1x_1)+(\lambda_2S+\lambda_2x_2)\\
\subset\lambda_1C+\lambda_2C=(\lambda_1+\lambda_2)C,\quad \text{при условии } \lambda_1\cdot\lambda_2\geq 0. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Таким образом, доказано утверждение: *для $S\subset\mathbb{R}^n$ и выпуклого множества $C\subset\mathbb{R}^n$ для любых $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ при $\lambda_1\cdot\lambda_2\geq 0$ справедливы соотношения*

$$
\lambda_1(C \overset{*}{-} S)+\lambda_2(C \overset{*}{-} S)\subset(\lambda_1+\lambda_2)C \overset{*}{-} (\lambda_1+\lambda_2)S=(\lambda_1+\lambda_2)(C \overset{*}{-} S), \qquad (9)
$$

где последнее равенство приведено в [13, Предложение 1.1.1, второе равенство после (1.1.3)]. При этом [**co**] — частный случай этого утверждения при значениях $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ и $\lambda_1+\lambda_2=1$.

Возможно и иное доказательство [**co**]. Если $S+x\subset C$, то $\operatorname{co}(S+x)\subset\operatorname{co}C$, откуда $\operatorname{co}S+x\subset\operatorname{co}C$ и $x\in\operatorname{co}C \overset{*}{-} \operatorname{co}S$. Отсюда $C \overset{*}{-} S\subset\operatorname{co}C \overset{*}{-} \operatorname{co}S$. Очевидно, $C \overset{*}{-} S\supset C \overset{*}{-} \operatorname{co}S$, поскольку $S\subset\operatorname{co}S$. Таким образом,

$$
C \overset{*}{-} \operatorname{co}S\subset C \overset{*}{-} S\subset\operatorname{co}C \overset{*}{-} \operatorname{co}S \text{ \textit{для любых} } C,S\subset\mathbb{R}^n
$$

и

$$
C \overset{*}{-} S=C \overset{*}{-} \operatorname{co}S,\ \text{\textit{если} } C \text{ — \textit{выпуклое множество.}} \qquad (10)
$$

Но геометрическая разность двух выпуклых множеств — выпуклое множество [10, Теорема 8.8], откуда ввиду (10) вновь следует [**co**].

[**ds**]. Из комментариев после Определений 1 и 2 утверждение верно для $C=\varnothing$ или $S=\varnothing$. Пусть теперь y — направление звёздности для C. По Определениям 1 и 2 это означает, что $C+ty\subset C$ для любого числа $t\geq 0$. Тогда для $x\in C \overset{*}{-} S$, т. е. $S+x\subset C$, получаем $S+(x+ty)\subset C+ty\subset C$ при всех $t\geq 0$. Следовательно, $x+ty\in C \overset{*}{-} S$ при каждом $t\geq 0$. По Определению 1 вектор y — направление звёздности для $C \overset{*}{-} S$.

[**dl**]. По Определению 1 это утверждение — очевидное следствие предыдущего.

[**ph**]. Из комментариев после Определения 2 если $C=\varnothing$, то $C \overset{*}{-} S=\varnothing$, когда $S\neq\varnothing$, и $C \overset{*}{-} S=\mathbb{R}^n$, когда $S=\varnothing$. Таким образом, из комментариев после Определения 1 при $C=\varnothing$ разность $\varnothing \overset{*}{-} S$ полиэдральна. Аналогично при $S=\varnothing$ разность $C \overset{*}{-} S=C \overset{*}{-} \varnothing=\mathbb{R}^n$ — полиэдральное множество.

Пусть теперь $C\neq\varnothing$ и $S\neq\varnothing$. По Определению 1 полиэдральное множество C задается конечной системой линейных неравенств вида (3), т. е. для некоторого конечного набора векторов $a_k\in\mathbb{R}^n$ и чисел $b_k\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,m\in\mathbb{N}$,

$$
C=\bigl\{x\in\mathbb{R}^n\colon \langle a_k,x\rangle-b_k\leqslant 0, k=1,\dots m\bigr\}. \qquad (11)
$$

Точка x принадлежит $C \overset{*}{-} S$, т. е. $S + x \subset C$, если и только если $x + s \in C$ для любого $s \in S$. Отсюда по описанию (11) $x \in C \overset{*}{-} S$, если и только если

$$\langle a_k, x\rangle + \langle a_k, s\rangle - b_k \leqslant 0 \textit{ для всех } s \in S,\ k = 1, \dots, m. \tag{12}$$

Если хотя бы для одного номера k здесь $\sup_{s\in S}\langle a_k, s\rangle = +\infty$, то $C \overset{*}{-} S = \varnothing$ полиэдрально. В противном случае (12) эквивалентно конечной системе линейных неравенств

$$\langle a_k, x\rangle - b'_k \leqslant 0,\ k = 1, \dots, m,\ \textit{где}\ b'_k := b_k - \sup_{s\in S}\langle a_k, s\rangle \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

поскольку $S \neq \varnothing$. Последняя система полностью определяет $C \overset{*}{-} S$. □

Далее также потребуется обратная к пп. **[ds]** и **[dl]** Леммы 3.1

Лемма 3.2. *Пусть C — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \varnothing$, и $y \in \mathbb{R}^n$ — направление звёздности (соответственно направление линейности) для $C \overset{*}{-} S \neq \varnothing$. Тогда y — направление звёздности (соответственно направление линейности) для C.*

Доказательство. По Определению 1 достаточно доказать Лемму 3.2 для направлений звёздности y. Условия Леммы 3.2 означают, что для любой точки $x \in C \overset{*}{-} S \neq \varnothing$ луч $r_y(x)$ из (2) содержится в $C \overset{*}{-} S$. Другими словами, $S + x \subset C$ влечет за собой $S + r_y(x) \subset C$. Рассмотрим произвольный элемент $s \in S \neq \varnothing$. Тогда $s+x \in C$ и $s+x+ty \in C$ для любого $t \geq 0$. Таким образом, для некоторой точки $s + x \in$ луч $l_y(s + x)$ содержится в C.

Предложение 1 ([9, Теорема 8.3])**.** *Если $C \subset \mathbb{R}^n$ — замкнуто и выпукло и для некоторой точки $c \in C$ луч $r_y(c)$ $\big($соответственно прямая $l_y(c)\big)$ содержится в C, то C звёздно (соответственно линейно) в направлении y.*

По этому Предложению y — направление звёздности для C. □

4. Покрытие сдвигами и геометрическая разность

Как будет пояснено в конце этого раздела, развитием существенной части Теоремы VKE [8, 1, **2.1**] и одним из обобщений Теоремы Хелли может считаться

Теорема 1 (о покрытиях сдвигами)**.** *Пусть $\mathcal{C}$ — семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ из* (4)*, а также задано семейство произвольных множеств*

$$\mathcal{S} := \{S_\beta \subset \mathbb{R}^n \colon \beta \in \mathrm{B}\}, \quad \mathrm{B} \textit{ — множество индексов.} \tag{14}$$

Допустим, что выполнено условие конечности

(F) $\operatorname{card} \mathrm{A} < \infty$ *и* $\operatorname{card}\{\beta \in \mathrm{B} \colon S_\beta \neq \varnothing\} < \infty$

или для $\mathcal{C}$ выполнено условие (d) *из Теоремы Хелли, но с дополнительными ограничениями $\mathrm{A}_0 = \varnothing$ или $\operatorname{card} \mathrm{B} < \infty$. Положим*

$$C := \bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}} C_\alpha, \quad S := \bigcup_{\beta\in\mathrm{B}} S_\beta. \tag{15}$$

Следующие четыре утверждения попарно эквивалентны (с учётом Соглашения из Введения)*:*

(T) *некоторый сдвиг множества S содержится в множестве C;*
(C) *для любого набора $n+1$ множеств из $\mathcal{C}$ некоторый сдвиг множества S содержится в пересечении этого набора $n + 1$ множеств;*
(S) *для любого набора $n + 1$ множеств из $\mathcal{S}$ некоторый сдвиг множества C покрывает (включает в себя) все $n + 1$ множеств из этого набора;*

(CS) *для любых наборов $n+1$ индексов*

$$\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in \mathrm{A} \quad \text{и} \quad \beta_1,\dots,\beta_{n+1}\in \mathrm{B} \tag{16}$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1}\bigl(C_{\alpha_k} \stackrel{*}{-} S_{\beta_k}\bigr) \tag{17}$$

геометрических разностей $C_{\alpha_k} \stackrel{*}{-} S_{\beta_k}$ непусто.

Условие (17) в (CS) по Определению 2 геометрической разности можно заменить на любое из следующих двух эквивалентных ему условий:

(CSC) *для любых наборов индексов* (16) *существует вектор $x\in\mathbb{R}^n$, для которого сдвиги $S_{\beta_k}+x$ содержатся в C_{α_k} при всех $k=1,\dots,n+1$;*

(CSS) *для любых наборов индексов* (16) *существует вектор $x\in\mathbb{R}^n$, для которого сдвиг $C_{\alpha_k}-x$ покрывает S_{β_k} при всех $k=1,\dots,n+1$.*

Теперь мы можем дать

Доказательство Теоремы 1. Если $S=\varnothing$, то из (15) все $S_\beta=\varnothing$ и каждое из четырех утверждений-высказываний Теоремы 1 о сдвигах истинно. Если хотя бы одно из множеств C_α пусто, то $C=\varnothing$ и каждое из четырех утверждений Теоремы о сдвигах с учетом Соглашения из Введения влечет за собой пустоту всех S_β и S. Значит и в этом случае все эти четыре утверждения истинны. Поэтому далее в доказательстве можно считать, что $S\neq\varnothing$ и все $C_\alpha\neq\varnothing$. Истинность пар двойных «вертикальных и горизонтальных» импликаций сторон «прямоугольника»

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{T}) & \Rightarrow & (\mathrm{C})\\
\Downarrow & \nwarrow & \Downarrow\\
(\mathrm{S}) & \Rightarrow & (\mathrm{CS})
\end{array}$$

даже без каких бы то ни было условий на семейства $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ здесь достаточно очевидна. Отметим лишь, что импликации (C)⇒(CS) и (S)⇒(CS) еще более прозрачны, если рассматривать (CS) соответственно в форме (CSC) и (CSS). Таким образом, в доказательстве нуждается только справедливость «диагональной» импликации (CS)→(T). При этом пустые множества S_β из семейства $\mathcal{S}$ не влияют на пересечение (17), поскольку $C_\alpha \stackrel{*}{-}\varnothing=\mathbb{R}^n$ для любого $C_\alpha\subset\mathbb{R}^n$. Поэтому, переходя от множества индексов B к подмножеству индексов $\{\beta\in\mathrm{B}\colon S_\beta\neq\varnothing\}$ и сохраняя для него прежнее обозначение B, можем считать далее, что все множества S_β непусты.

Рассмотрим теперь семейство множеств

$$\mathcal{C}\stackrel{*}{-}\mathcal{S}:=\{C_{\alpha,\beta}:=C_\alpha\stackrel{*}{-}S_\beta\colon(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}\}. \tag{18}$$

Лемма 4.1. *Если в обозначениях* (18) *и* (15) *пересечение*

$$\bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}} C_{\alpha,\beta} \tag{19}$$

непусто, то некоторый сдвиг множества S содержится в C, т. е. выполнено высказывание (T).

Действительно, пусть $x\in\mathbb{R}^n$ принадлежит пересечению (19). Это означает, что

$$S_\beta+x\subset C_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha\in\mathrm{A} \text{ и } \beta\in\mathrm{B}.$$

Отсюда

$$S_\beta+x\subset\bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}}C_\alpha \quad \text{для любого} \quad \beta\in\mathrm{B}.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{\beta\in\mathrm{B}} S_\beta + x = \bigcap_{\beta\in\mathrm{B}} (S_\beta + x) \subset \bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}} C_\alpha,$$

т. е. $S + x \subset C$, что и требовалось. В свете Леммы 4.1 для доказательства импликации (CS)⇒(T) достаточно обосновать применимость Теоремы Хелли о выпуклых множествах к семейству (18).

При выполнении (CS) и по предшествующим соглашениям в семействе $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$

(!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ непусты, и, более того, непусто любое пересечение $\bigcap_{k=1}^{n+1} C_{\alpha_k,\beta_k}$ из (17) для произвольных наборов индексов (16);

(!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ выпуклы — п. [**co**] Леммы 3.1;

(!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ замкнуты, если все C_α замкнуты, — п. [**cl**] Леммы 3.1;

(!) имеется лишь конечное число множеств $C_{\alpha,\beta}$ при условии конечности (F), т. е. $\operatorname{card}(\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}) < \infty$.

Условие (F)**.** В силу последнего если выполнено условие конечности (F), то при условии (CS) при наших соглашениях условие конечности (f) выполнено для семейства $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$. Значит, Теорема Хелли о выпуклых множествах применима к семейству $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$, и справедливость импликации (CS)⇒(T) в этом случае доказана.

Условие (d)**.** При условии $\mathrm{A}_0 = \varnothing$ пусть y — общее направление звёздности для $C_{\alpha,\beta} = C_\alpha \overset{*}{-} S_\beta$ при всех $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$. Тогда по Лемме 3.2 вектор y — общее направление звёздности для всех C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$. Отсюда по условию (d) вектор y — направление линейности для C_α при всех $\alpha \in \mathrm{A}$, а из п. [**dl**] Леммы 3.1 вектор y — направление линейности для всех $C_{\alpha,\beta}$ при $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$. Таким образом, для семейства $\mathrm{C} \overset{*}{-} \mathrm{S}$ выпуклых замкнутых множеств из (18) выполнено условие вида (d) (без конечного подмножества индексов A_0). Следовательно, к семейству $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$ применима Теорема Хелли, и по Лемме 4.1 получаем требуемое утверждение (T).

Пусть теперь при условии (d) множество индексов B конечно. Рассмотрим разбиение множества индексов $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ на два непересекающихся подмножества индексов

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = (\mathrm{A}_0\times\mathrm{B}) \bigcup \bigl((\mathrm{A}\setminus\mathrm{A}_0)\times\mathrm{B}\bigr).$$

Тогда *конечное* подсемейство

$$\bigl\{C_{\alpha,\beta}\colon (\alpha,\beta)\in\mathrm{A}_0\times\mathrm{B}\bigr\}$$

семейства $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$ состоит по п. [**ph**] Леммы 3.1 из *полиэдральных множеств.* Пусть теперь y — направление звёздности для всех множеств семейства $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$. Вновь по Лемме 3.2 вектор y — общее направление звёздности для всех C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$. Отсюда по условию (d) вектор y — направление линейности для C_α при всех $\alpha \in \mathrm{A}\setminus\mathrm{A}_0$, а из п. [**dl**] Леммы 3.1 вектор y — направление линейности для всех $C_{\alpha,\beta}$ при $(\alpha,\beta) \in (\mathrm{A}\setminus\mathrm{A}_0)\times\mathrm{B}$. Таким образом, для семейства $\mathrm{C} \overset{*}{-} \mathrm{S}$ выпуклых замкнутых множеств из (18) выполнено условие вида (d) (в роли A_0 выступает $\mathrm{A}_0\times\mathrm{B}$). Следовательно, к семейству $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$ применима Теорема Хелли, и по Лемме 4.1 получаем требуемое утверждение (T). □

Замечание 2. Теорема 1 о сдвигах имеет место и при условии (b) из Замечания 1, поскольку оно — частный случая условия (d) при $\mathrm{A}_0 = \varnothing$.

Комментарий 1 (*к Теореме* 1)**.** Убедимся, что теорема Хелли и бóльшая часть Теоремы VKE (в части, касающейся терминов *«покрывает всё», «содержится во всех»*) — это частные проявления Теоремы 1.

1. Для произвольного одноточечного непустого множества S, например $S = \{0\}$, и одноэлементного семейства $\mathcal{S} = \{S\}$ импликация (C)⇒(T) Теоремы 1 о покрытиях сдвигами дает в точности приведенную выше в начале раздела 2 общую Теорему Хелли о выпуклых множествах.

2. Если семейство $\mathcal{C}$ одноэлементное, т. е. состоит из одного выпуклого множества C, то импликация (S)$\Rightarrow$(T) Теоремы 1 о покрытиях сдвигами дает как частный случай Теорему VKE из Введения в части *«сдвиг множества C «покрывает всё».*
3. Если семейство $\mathcal{S}$ одноэлементное и состоит из одного выпуклого множества S, то импликация (C)$\Rightarrow$(T) Теоремы 1 о покрытиях сдвигами переходит в частный случай Теоремы VKE из Введения в части *«содержит в себе»,* но только необходимо взаимно поменять местами обозначения-символы: S вместо C, $\mathcal{C}$ вместо $\mathcal{S}$ и наложить требования либо конечности $\mathcal{C}$, либо компактности S.
4. Вывод части *«пересекает всё»* Теоремы VKE и ее обобщения перенесен в раздел 4 после Теоремы 2 о пересечениях сдвигов, поскольку несколько неожиданно (во всяком случае, для нас) он оказался связан не с геометрической разностью, а с алгебраической разностью множеств.

Комментарий 2 (*предшествующие специальные версии Теоремы* 1)**.** Справедливость импликации (C)$\Rightarrow$(T) Теоремы 1 была установлена или отмечена ранее в [8] в следующих трех весьма частных случаях:

% семейство $\mathcal{C}$ выпуклых множеств *конечно,* а S — *выпуклое* множество [8, **2.1**] (Теорема VKE);

% семейство $\mathcal{C}$ состоит из *выпуклых компактов*, и S также *выпуклый компакт* [8, **2.1**] (Теорема VKE);

% семейство $\mathcal{C}$ состоит из *замкнутых полупространств,* имеющих *ограниченное* пересечение, а S — *выпуклое тело,* т. е. выпуклый компакт с непустой внутренностью $\operatorname{int} S \neq \varnothing$ [8, **6.18**].

В специальном случае, когда $\mathcal{S}$ из (14) — это семейство всех одноточечных множеств $\{s\}$, $s \in S$, т. е. $\mathrm{B} := S$ — еще и множество индексов и $S_s := \{s\}$, $s \in S$, справедливость импликации (S)$\Rightarrow$(T) легко выводится из [8, **2.1**] (необходимо рассматривать $\mathcal{K} = \mathcal{S}$) в следующих двух также очень особых ситуациях:

% *S конечно,* а семейство $\mathcal{C}$ состоит из *одного* выпуклого множества C [8, **2.1**] (Теорема VKE);

% семейство $\mathcal{C}$ состоит из *одного выпуклого компакта C* (для выпуклого тела C см. [8, **6.2**], а при $\operatorname{int} C = \varnothing$ доказательство легко следует из [8, **2.1**] (Теорема VKE)).

5. Пересечение сдвигов и алгебраическая разность

Дадим «алгебраическое» развитие той же Теоремы VKE из Введения.

Теорема 2 (о пересечении сдвигов)**.** *Пусть теперь семейство*

$$\mathcal{C} := \{C_\alpha \subset \mathbb{R}^n \colon \alpha \in \mathrm{A}\}, \quad \mathrm{A} \text{ — } \textit{множество индексов}, \tag{20}$$

состоит из произвольных (ср. с (4)) *непустых множеств C_α, и семейство множеств* (ср. с (14))

$$\mathcal{S} := \{S_\beta \subset \mathbb{R}^n \colon \beta \in \mathrm{B}\}, \quad \mathrm{B} \text{ — } \textit{множество индексов}, \tag{21}$$

также состоит из произвольных непустых множеств S_β. Предполагаем, что каждая алгебраическая, т. е. векторная, разность (Определение 2, (7))

$$C_\alpha - S_\beta =: C_\alpha + (-S_\beta) \quad \textit{выпукла при всех } \alpha \in \mathrm{A}, \beta \in \mathrm{B}. \tag{22}$$

Допустим, что выполнено одно из двух условий:

(F) *условие конечности из Теоремы* 1, *т. е.* $\operatorname{card} \mathrm{A} + \operatorname{card} \mathrm{B} < \infty$*;*

(id) *каждая алгебраическая разность в* (22) *замкнута, для некоторых конечных подмножеств* $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$, $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ *алгебраические разности в* (22) *полиэдральны при всех*

$(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}_0\times\mathrm{B}_0$, *а также всякое направление звёздности, общее для всех алгебраических разностей* (22) *при всех* $(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$, *оказывается направлением линейности для алгебраических разностей* (22) *при всех* $(\alpha,\beta)\in (\mathrm{A}\times\mathrm{B})\setminus(\mathrm{A}_0\times\mathrm{B}_0)$.

Следующие утверждения эквивалентны (см. Соглашение из Введения)*:*

(I) *существует единый вектор* $x\in\mathbb{R}^n$, *для которого при любом индексе* $\beta\in\mathrm{B}$ *каждый сдвиг* $S_\beta+x$ *пересекается со всеми* C_α *из* $\mathcal{C}$*;*

(CSI) *для любых наборов* $n+1$ *индексов*

$$\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in\mathrm{A} \ \ \textit{и} \ \ \beta_1,\dots,\beta_{n+1}\in\mathrm{B}$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1}\bigl(C_{\alpha_k}-S_{\beta_k}\bigr) \tag{23}$$

алгебраических разностей из (22) *непусто.*

Доказательство. Импликация (I)$\Rightarrow$(CSI) очевидна по определениям и справедлива для любых систем непустых множеств. Обратную же импликацию (CSI)$\Rightarrow$(I) доказываем одновременно при условиях и (F), и (id). Поскольку множества (22) выпуклы, к ним применима Теорема Хелли о выпуклых множествах. Здесь условию (F) соответствует условие конечности (f), а условию (id) — условие (d). Если в Теореме Хелли вместо наборов индексов A,A_0 расматривать соответственно наборы индексов $\mathrm{A}\times\mathrm{B},\mathrm{A}_0\times\mathrm{B}_0$, а вместо системы множеств C_α — систему множеств из всевозможных алгебраических разностей (22), то по Теореме Хелли пересечение

$$\bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}}\bigl(C_\alpha-S_\beta\bigr)\neq\varnothing.$$

Пусть x — некоторая точка из последнего пересечения. Т. е. всегда найдутся $c_\alpha\in C_\alpha$ и $s_\beta\in S_\beta$, для которых $x=c_\alpha-s_\beta$, или

$$S_\beta+x\ni s_\beta+x=c_\alpha\in C_\alpha \ \underline{\text{для любых пар}}\ (\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}.$$

А это и есть искомый единый вектор сдвига x из (I). □

Напомним, что в начале раздела 4 после формулировки Теоремы 1 и условий (CSC)–(CSS) последний из 4-х пунктов (1)–(4) остался нераскрытым (вывод части *«пересекает всё»*). Теперь мы сможем вернуться к последнему пункту из пп. (1)–(4), для того чтобы восполнить наш пробел о выводе части *«пересекает всё»* Теоремы VKE из Введения и обобщить её.

Следствие 1. *Пусть* $C\subset\mathbb{R}^n$ *непусто и задано семейство множеств* (21)*, алгебраические разности* $C-S_\beta$ *выпуклы при всех* $\beta\in\mathrm{B}$*, где* B *конечно или, в противном случае, все эти алгебраические разности замкнуты и хотя бы одна из них ограничена. Если для каждого набора* $n+1$ *множеств*

$$\bigl\{S_{\beta_1},\dots S_{\beta_{n+1}}\bigr\} \tag{24}$$

из семейства (21) *некоторый сдвиг множества* C *пересекает одновременно все* $n+1$ *множеств из* (24)*, то найдется сдвиг множества* C*, пересекающий все множества семейства* $\mathcal{S}$*.*

Доказательство. Ввиду одноточечности семейства $\mathcal{C}=\{C\}$ пересечение принимает достаточно простой вид, а условие непустоты пересечения (23) и означает последнюю фразу в формулировке доказываемого Следствия. При бесконечности множества B замкнутость алгебраических разностей и, прежде всего, ограниченность хотя бы одной из этих алгебраических разностей (см. и ср. раздел 2, Замечание 1, п. (b), сразу после формулировки

Теоремы Хелли) поставляет нам условие (id). Таким образом, выполнены все условия Теоремы 2 о пересечении сдвигов, и Следствие 1 доказано. □

Комментарий 3. Следующие комментарии и замечания дополняют Теорему 2 о пересечении сдвигов:

* если $\operatorname{card} \mathrm{B} = 1$ и $S_\beta = \{0\}$, то Теорема 2 — в точности Теорема Хелли о выпуклых множествах, сформулированная выше;
* при условиях $\operatorname{card} \mathrm{A} = 1$, т. е. $\mathcal{C}$ состоит из *одного выпуклого* множества C, все S_β, $\beta \in \mathrm{B}$, выпуклы и множество индексов B конечно или же C и все множества $S_\beta \in \mathcal{S}$ компактны, Теорема 2 доказана в [8, **2.1**];
* выпуклость всех алгебраических разностей в (22) можно заменить на более жесткое условие выпуклости всех $C_\alpha \in \mathcal{C}$ и всех $S_\beta \in \mathcal{S}$, поскольку алгебраическая разность двух выпуклых множеств выпукла;
* часть условия (id) *«каждая алгебраическая разность в* (22) *замкнута, ...»* можно заменить на более жесткое условие *«для каждой пары C_α, S_β одно из множеств замкнуто, а другое компактно, ...»,* так как алгебраическая разность замкнутого множества и компакта — замкнутое множество;
* часть условия (id) *«для некоторых конечных подмножеств $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$, $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ алгебраические разности в* (22) *полиэдральны для всех пар $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0$, ...»* можно заменить на более жесткое условие *«для некоторых конечных подмножеств индексов $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$, $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ каждое из множеств C_α при $\alpha \in \mathrm{A}_0$ и S_β при $\beta \in \mathrm{B}_0$ выпукло и полиэдрально, ...»,* так как алгебраическая сумма полиэдральных выпуклых множеств полиэдральна [9, Следствие 19.3.2];
* если для некоторых подмножеств $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ и $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$ пересечение
$$\bigcap_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}'\times\mathrm{B}'} \bigl(C_\alpha - S_\beta\bigr)$$
ограничено, то направлений звёздности, общих для всех алгебраических разностей, (22) не существует, и заключительная часть условия (id) об общих направлениях звёздности выполнена автоматически;
* если в паре C_α, S_β одно из множеств, C_α или S_β замкнуто, выпукло и неограничено, а другое ограничено, то направление звёздности для алгебраической разности из (22) будет и направлением звёздности (соответственно линейности) для неограниченного множества соответственно C_α или S_β (см. Предложения 1). Это может облегчить поиск общих направлений звёздности при проверке условия (id) Теоремы 2.

6. Теоретико-множественные разности

Для полноты изложения приведем в определенном смысле аналог Теорем 1 и 2 для теоретико-множественной разности множеств, которую в этом разделе называем для краткости просто разностью.

Теорема 3 (о разностях множеств)**.** *Пусть, по-прежнему, семейства множеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ определены соответственно как в* (4) *и* (14) *и как в* (15)
$$C = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}} C_\alpha, \quad S = \bigcup_{\beta\in\mathrm{B}} S_\beta. \tag{25}$$
Предполагаем, что все разности[1]
$$C_\alpha \setminus S_\beta \text{ выпуклы при всех } \alpha \in \mathrm{A} \text{ и } \beta \in \mathrm{B}. \tag{26}$$
Допустим, что выполнено одно из двух условий

[1]Такое часто возможно, даже если сами множества и невыпуклы.

(F) *условие конечности из Теорем* 1 *и* 2*, т. е.* $\operatorname{card} \mathrm{A} + \operatorname{card} \mathrm{B} < \infty$*;*

(dd) *каждая разность в* (26) *замкнута, для некоторых конечных подмножеств* $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$, $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ *разности в* (26) *полиэдральны для всех пар* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0$*, а также всякое направление звёздности, общее для всех разностей* (26) *при всех* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$*, оказывается направлением линейности для разностей* (26) *при всех* $(\alpha, \beta) \in (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0)$.

Следующие утверждения эквивалентны (с учётом Соглашения из Введения):

(D) *разность* $C \setminus S$ *— непустое множество;*

(CSD) *для любых наборов* $n+1$ *индексов*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathrm{A} \quad \textit{и} \quad \beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in \mathrm{B} \tag{27}$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} (C_{\alpha_k} \setminus S_{\beta_k}) \tag{28}$$

разностей из (26) *непусто.*

Доказательство. Для любых наборов индексов A', B' и множеств произвольной природы C_α, $\alpha \in \mathrm{A}'$ и S_β, $\beta \in \mathrm{B}'$ справедливо элементарное общее теоретико-множественное равенство для разностей

$$\bigcap_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}' \times \mathrm{B}'} \Bigl(C_\alpha \setminus S_\beta\Bigr) = \biggl(\bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}'} C_\alpha\biggr) \setminus \biggl(\bigcup_{\beta \in \mathrm{B}'} S_\beta\biggr).$$

К примеру, при $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ и $\mathrm{B} = \mathrm{B}'$ в обозначениях (25) имеем

$$C \setminus S = \biggl(\bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} C_\alpha\biggr) \setminus \biggl(\bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} S_\beta\biggr). \tag{29}$$

Следовательно, если множество $C \setminus S$ не пусто, то такова же и правая часть в (29). Таким образом, утверждение (D) Теоремы влечет за собой непустоту множеств вида (28) при любом наборе индексов (27), т. е. доказано (CSD).

Импликацию (CSD)⇒(D) доказываем одновременно при условиях и (F), и (dd). Так как множества (26) выпуклы, к ним применима Теорема Хелли о выпуклых множествах. Здесь условию (F) соответствует условие (f), а условию (CSD) — условие (d), если в Теореме Хелли вместо наборов индексов A, A_0 рассматривать соответственно наборы индексов $\mathrm{A} \times \mathrm{B}, \mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0$, а вместо системы множеств C_α — систему множеств из всевозможных разностей (26). □

Комментарий 4 (*к Теореме* 3)**.**

\# Если $\operatorname{card} \mathrm{B} = 1$ и $S_\beta = \varnothing$ — пустое множество, то Теорема 3 — в точности Теорема Хелли о выпуклых множествах из раздела 2.

\# Часть условия (dd) *«каждая разность в* (26) *замкнута, ...»* можно заменить на более жесткое *«все* $C_\alpha \in \mathcal{C}$ *замкнуты, а все* $S_\beta \in \mathcal{S}$ *открыты, ...»*, поскольку в этом случае каждая разность (26) замкнута.

\# Если для некоторых подмножеств $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ и $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$ пересечение

$$\bigcap_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}' \times \mathrm{B}'} (C_\alpha \setminus S_\beta)$$

ограничено, то направлений звёздности, общих для всех разностей (26), не существует, и заключительная часть условия (dd) об общих направлениях звёздности выполнена автоматически, так как их просто нет.

\# Если все множества $C_\alpha \in \mathcal{C}$ замкнуты, выпуклы и неограничены, а все множества $S_\beta \in \mathcal{S}$ ограничены, то направление звёздности (линейности) для разности из (26) будет и направлением звёздности (соответственно линейности) для неограниченного множества C_α, что легко следует из Предложения 1. Это может облегчить поиск общих направлений звёздности при проверке условия (dd) Теоремы 2.

Замечание 3. Дальнейшие богатые результатами вариации на тему Теоремы Хелли о выпуклых множествах, в некоторой мере пересекающихся с нашими результатами (особенно из раздела 5 в части аналогов или обобщений трансверсалей для семейств множеств) наряду с уже приведенными выше источниками можно найти у Дольникова В. Л., Богатого С. А., Бобылева Н. А., Карасева Р. Н. [24]—[27] и многих других.

Автор глубоко признателен рецензенту за крайне полезные замечания и важную дополнительную информацию по тематике статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Физматгиз. 1956.
2. B. Ya. Levin *Lectures on entire functions.* Transl. Math. Monographs. Providence RI. Amer. Math. Soc. V. 150. 1996.
3. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности (издание четвертое, дополненное).* Уфа: РИЦ БашГУ. 2012.
4. Хабибуллин Б. Н. *Трансляты выпуклых множеств* // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математическай школы «Понтрягинские чтения–XXIV». Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ. 2013. С. 207–208.
5. Хабибуллин Б. Н. *Теорема Хелли, трансляты множеств и опорная функция* // Нелинейные уравнения и комплексный анализ. Сборник тезисов. Уфа. Институт математики УНЦ РАН. 2013. С. 51–53.
6. Хабибуллин Б. Н. *Теорема Хелли и покрытие транслятами* // Материалы XI Казанская летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань. Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского. 2013. С. 196–199.
7. B. N. Khabibullin *Helly's Theorem and translation of convex sets* // Asymptotic geometric analysis. Saint-Petersburg. EIMI. 2013. P. 9–10.
8. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В *Теорема Хелли.* М.: Мир. 1968.
9. Рокафеллар Р. Т. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.
10. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* М.: Наука. 1985.
11. Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Математический ин-т им.В.А. Стеклова РАН. Москва. 1987. Т. 14. С. 5–101.
12. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения.* М.: Эдиториал УРСС. 2000.
13. Половинкин Е. С., Балашов М. В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.* М.: Физматлит. 2004.
14. R. T. Rockafellar *Helly's theorem and minima of convex functions* // Duke Math. J. 1965. V. 32. P. 381–398.
15. L. Sandgren *On convex cones* // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 19–28.
16. V. Klee *Infinite-dimensional intersection theorems* // Convexity: Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society Eds. V. Klee. 1963. P. 349–360.
17. Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // ДАН СССР. 1967. № 175. С. 764–766.
18. Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // Матем. сборник. 1980. Т. 112(154), № 3(7). С. 307–330.
19. Петров Н. Н. *Введение в выпуклый анализ.* Ижевск. Удмуртский государственный университет. 2009.

20. Толстоногов А. А. *Дифференциальные включения в банаховом пространстве.* М.: Наука. 1986.
21. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1995.
22. Печерский С. Л. *Значение Шепли ТП игр, разности с-ядер выпуклых игр и точка Штейнера выпуклых компактов* // Математическая теория игр и её приложения. 2012. Т. 4, вып. 3. С. 58–85.
23. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. *Опорные функции некоторых специальных множеств, конструктивные процедуры сглаживания, геометрическая разность* // В сб. «Проблемы динамического управления». М.: МАКС Пресс, 2005. Вып. 1. С. 24–110 (электронная версия http://oc.cs.msu.su/download/76/kiselev05.pdf).
24. Дольников В. Л. *Теоремы типа Хелли для трансверсалей семейств множеств и их приложения.* Диссертация и автореферат на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Ярославль. 2000.
25. Богатый С. А. *Топологическая теорема Хелли* // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 2. С. 365–405.
26. Бобылев Н. А. *Теорема Хелли для звёздных множеств* // Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.). Том 7. Геометрия и топология. Итоги науки и техн. Сер. «Соврем. мат. и ее прил.» Темат. обзоры, 68. М.: ВИНИТИ, 1999. С. 16–26.
27. Карасев Р. Н. *Топологические методы в комбинаторной геометрии* // УМН. 2008. Т. 63, 6(384). С. 39–90.

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Khabib-Bulat@mail.ru`