Б. Н. Хабибуллин

Башкирский государственный университет,

Khabib-Bulat@mail.ru

Критерии полноты систем экспонент в пространствах функций на отрезке с точностью до одной или двух экспонент

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества натуральных, вещественных и комплексных чисел; $\mathbb{R}_* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\mathbb{C}_* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathbb{C}_\pm := \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Для отрезка $I_d \subset \mathbb{R}$ длины $d > 0$ через $C(I_d)$ и $L^p(I_d)$ обозначаем пространства функций $f\colon I_d \to \mathbb{C}$ соответственно непрерывных с нормой $\|f\|_\infty := \sup\bigl\{|f(x)|\colon x \in I_d\bigr\}$ и с нормой $\|f\|_p := \Bigl(\int_{I_d} |f(x)|^p\,dx\Bigr)^{1/p} < +\infty$, $p \geqslant 1$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_*$ — последовательность попарно различных чисел без предельных точек в $\mathbb{C}$. Она порождает *систему экспонент* $\operatorname{Exp}^{i\Lambda} := \{x \mapsto e^{i\lambda x}\colon x \in I_d,\ \lambda \in \Lambda\}$ на I_d. Система $\operatorname{Exp}^{i\Lambda}$ *полна* в $C(I_d)$ или $L^p(I_d)$, если замыкание ее линейной оболочки совпадает с $C(I_d)$ или $L^p(I_d)$ (см. [1]).

Для функции $\phi\colon \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$, *прямое преобразование Гильберта* H определяется интегралом $(\mathrm{H}\phi)(x) := \frac{1}{\pi}\ \mathrm{pv}\int\limits_{\mathbb{R}_*} \dfrac{\phi(t)}{x-t}\,dt$, $x \in \mathbb{R}_*$, где $\mathrm{pv}\int\limits_{\mathbb{R}_*}$ главное значение интеграла в смысле Коши. **Класс RP_0^∞ основных, или тестовых, функций** состоит из *бесконечно дифференцируемых функций* $\phi\colon \mathbb{R}_* \to [0,+\infty)$ для которых одновременно выполнены

- *условие финитности* $\phi(x) \equiv 0$, $|x| \geqslant R_\phi > 0$;
- *условие полунормировки* в нуле $\limsup\limits_{0\neq x\to 0} \dfrac{\phi(x)}{-\log|x|} \leqslant 1$;
- *условие убывания* $H\phi$ отдельно на $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$.

Для $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ определим значение *интеграла Пуассона*

$$(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\phi)(\lambda) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{(t-\operatorname{Re}\lambda)^2+(\operatorname{Im}\lambda)^2}\,\phi(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0,$$

а при $\lambda \in \mathbb{R}$ полагаем $(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\phi)(\lambda) := \phi(\lambda)$.

Теорема (анонсировано в [2]). *Если величина*

$$\sup_{\phi\in R\mathcal{P}_0^\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\phi)(\lambda_k) - \frac{d}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\,dx\right)$$

равна $+\infty$, *то система* $\operatorname{Exp}^{i\Lambda}$ *полна в* $C(I_d)$ *и* $L^p(I_d)$, $p \geqslant 1$. *Если же эта величина меньше* $+\infty$, *то для любых* $\lambda', \lambda'' \in \Lambda$ *система* $\operatorname{Exp}^{i\Lambda\setminus\{i\lambda'\}}$ *не полна в* $C(I_d)$ *и* $L^p(I_d)$ *при* $p \geqslant 2$, *а система* $\operatorname{Exp}^{i\Lambda\setminus\{i\lambda', i\lambda''\}}$ *не полна в* $L^p(I_d)$ *при* $1 \leqslant p < 2$.

Следствие. *Если* $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *— последовательность попарно различных точек и при некотором* $h \in \mathbb{R}$, *для которого* $\operatorname{Im}\lambda_k \neq -h$ *и* $\operatorname{Im}\gamma_k \neq -h$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$, *величина*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{|\operatorname{Im}\lambda_k+h|}{(t-\operatorname{Re}\lambda_k)^2+(\operatorname{Im}\lambda_k+h)^2} - \frac{|\operatorname{Im}\gamma_k+h|}{(t-\operatorname{Re}\gamma_k)^2+(\operatorname{Im}\gamma_k+h)^2}\right)$$

меньше $+\infty$, *а система* $\operatorname{Exp}^{i\Lambda}$ *полна в одном из пространств* $C(I_d)$ *или* $L^p(I_d)$, $p \geqslant 1$, *то для каждой пары различных* $\gamma', \gamma'' \notin \Gamma$ *система* $\operatorname{Exp}^{i\Gamma\cup\{i\gamma'\}}$ *полна в* $C(I_d)$ *и* $L^p(I_d)$ *при* $p \geqslant 2$, *а система* $\operatorname{Exp}^{i\Gamma\cup\{i\gamma', i\gamma''\}}$ *полна в* $L^p(I_d)$ *при* $1 \leqslant p < 2$.

Поддержано грантом РФФИ (проект № 09–01–00046а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Levin B. Ya. *Lectures on entire functions* – V. 150. – AMS, 1996.

2. Хабибуллин Б. Н. *Distribution of zero subsequences for Bernstein space and criteria of completeness for exponential system on a segment* // http://arxiv.org, arXiv:1104.2683v2. – 2011. – 8 P.