УДК 517.98 : 517.53/.55

ПРИМЕНЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ ДВОЙСТВЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

Хабибуллин[1] Б. Н.

В нашем кратком обзоре рассматривается ряд задач комплексного анализа и теории потенциала, сводящихся к существованию двойственного представления функционалов на векторных решетках. Даются некоторые достаточные условия для возможности такого представления. Кроме того, формулируются определённые результаты о представлениях мероморфных функций и о полноте систем экспонент на отрезке. Они на данный момент могут быть получены только посредством этого двойственного представления.

1. Введение

Везде в обзоре Ω — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ — натуральное число. Через $\mathrm{Hol}\,(\Omega)$, $\mathrm{Mer}\,(\Omega)$, $\mathrm{sbh}\,(\Omega)$, $\mathrm{psbh}\,(\Omega)$, $\mathrm{h}\,(\Omega)$ и $\mathrm{ph}\,(\Omega)$ обозначаем классы соответственно голоморфных, мероморфных, субгармонических, плюрисубгармонических, гармонических и плюригармонических функций на Ω; для $S \subset \mathbb{C}^n$, как обычно, $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ и $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$ — пространства непрерывных вещественнозначных и соответственно комплекснозначных функций. При $n = 1$ из определений имеем $\mathrm{sbh}\,(\Omega) = \mathrm{psbh}\,(\Omega)$, $\mathrm{h}\,(\Omega) = \mathrm{ph}\,(\Omega)$. Всюду во введении Λ — главное аналитическое множество в Ω, т. е. нулевое множество некоторой ненулевой функции $g_\Lambda \in \mathrm{Hol}\,(\Omega)$, заданное вместе с функцией кратности нулей функции g_Λ (дивизор нулей). В случае $n = 1$ удобно мыслить Λ как последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где каждая точка $\lambda \in \Omega$ повторяется столько раз, какова кратность нуля функции f в точке λ. Отношения и операции для множеств (последовательностей) нулей понимаются как в [1]–[5].

Различные задачи комплексного анализа сводяться к построению или доказательству существования (точной) огибающей — верхней

[1]Выполнено при поддержке РФФИ (№№ 09-01-00046_а, 08-01-97023-р_поволжье_а) и программы “Ведущие научные школы”, НШ–3081.2008.1.

или нижней — из определенного класса функций на Ω или на подмножестве $S \subset \Omega$. Отметим некоторые из них в подходящей трактовке.

1. Нетривиальность весового класса [1; § 10]. При каких условиях на *функцию-мажоранту* (*весовую функцию, вес*) $M\colon \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ найдется ненулевая функция $f \in \mathrm{Hol}\,(\Omega)$ с ограничением $\log|f| \leqslant M$ на Ω? Другими словами, вопрос состоит в исследовании условий нетривиальности класса функций

$$\mathrm{Hol}\,(\Omega, M) := \{f \in \mathrm{Hol}\,(\Omega)\colon\ \log|f| \leqslant M \text{ на } \Omega\},$$

т. е. условий, при которых $\mathrm{Hol}\,(\Omega, M) \neq \{0\}$. Зачастую достаточно убедиться в нетривиальности класса (выпуклого множества)

$$\{h \in \mathrm{psbh}\,(\Omega)\colon h \leqslant M \text{ на } \Omega\}, \tag{1}$$

т. е. доказать существование функции $h \not\equiv -\infty$ из этого класса, а затем для такой функции $h \leqslant M$ попытаться построить голоморфную функцию $f \not\equiv 0$, удовлетворяющую оценке $\log|f| \leqslant \check h \leqslant \check M$, где $\check h$ и $\check M$ — некоторые незначительные увеличения соответственно функций h и M. При этом существование такой функции f можно доказать при помощи решений $\overline{\partial}$- или $\partial\overline{\partial}$-задачи с оценками (см. [1], [6]) в духе Л. Хёрмандера или же путем аппроксимации функции h логарифмом модуля голоморфной функции. Правда, последний аппроксимационный способ представляется нам не соответствующим постановке задачи и в данной тематике излишним, поскольку здесь требуется только минорирование функции h, а не ее аппроксимация.

2. Описание нулевых множеств [1; § 8], [2], [3]. Пусть Λ — нулевое множество некоторой функции $g_\Lambda \in \mathrm{Hol}\,(\Omega)$. Если Ω — односвязная область, то Λ — *нулевое множество для класса* $\mathrm{Hol}\,(\Omega, M)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $h \in \mathrm{ph}\,(\Omega)$, для которой выполнено неравенство $\log|g_\Lambda| + h \leqslant M$. Это связано с тем, что $h \in \mathrm{ph}\,(\Omega)$ для односвязной области Ω в том и только том случае, когда имеет место представление $h = \mathrm{Re}\, f$ для некоторой $f \in \mathrm{Hol}\,(\Omega)$, или $h = \log|e^f|$. Другими словами, Λ — нулевое множество для $\mathrm{Hol}\,(\Omega, M)$, если и только если непуст класс

$$\{h \in \mathrm{ph}\,(\Omega)\colon h \leqslant M - \log|g_\Lambda| \text{ на } \Omega\}. \tag{2}$$

Некоторые подходы подобного рода возможны и для конечносвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, но при этом приходиться заменить функции h и M на их весьма малые изменения $\check h$ и $\check M$.

3. Описание нулевых подмножеств [1; § 11], [4]. В обозначениях предыдущего подраздела задача состоит в нахождении голоморфной ненулевой функции f, для которой $g_\Lambda f \in \mathrm{Hol}\,(\Omega, M)$, т. е. справедливо ограничение $\log|g_\Lambda f| \leqslant M$, или $\log|f| \leqslant M - \log|g_\Lambda|$. Аналогично предыдущим пунктам, вопрос вновь сводится к нетривиальности класса

$$\{h \in \mathrm{psbh}\,(\Omega)\colon h \leqslant M - \log|g_\Lambda| \text{ на } \Omega\}. \tag{3}$$

Эта постановка имеет двойственные выходы на проблемы аппроксимации в простанствах функций [5], прежде всего системами экспоненциальных функций, на существование для голоморфных функций голоморфных функций-мультипликаторов, “погашающих” их рост, и др. [6], [1; § 10].

4. Представление мероморфных функций [1; § 11], [2], [4]. Пусть $F = g/q$ — мероморфная функция в области Ω и $g, q \in \mathrm{Hol}\,(\Omega)$, $g, q \not\equiv 0$. Задача состоит в возможности представления функции $F \in \mathrm{Mer}\,(\Omega)$ в виде отношения двух функций из класса $\mathrm{Hol}\,(\Omega, M)$, возможно *без общих нулей.* При этом решение ее наиболее естественно искать в терминах функций M и $u_F := \max\{\log|g|, \log|q|\}$ или $u_F := \log\sqrt{|g|^2 + |q|^2}$ в связи с известными определениями различных вариантов характеристики Неванлинны функции F именно через u_F. При этом задачу можно в несколько ослабленной форме (см. п. 1) переформулировать как поиск условий, при которых класс

$$\{h \in \mathrm{psbh}\,(\Omega)\colon h \leqslant M - u_F \text{ на } \Omega\} \tag{4}$$

или класс (при дополнительном требовании "без общих нулей")

$$\{h \in \mathrm{ph}\,(\Omega)\colon h \leqslant M - u_F \text{ на } \Omega\} \tag{5}$$

нетривиален.

5. Комплексная теория потенциала [7], [8]. Основные объекты, такие, как (плюри)гармонические меры, функции Грина и им подобные, (максимальные) решения задачи Дирихле и пр., на которые опираются применения этой теории, строятся как верхняя огибающая специальных, чаще всего выпуклых и ограниченных сверху некоторой функцией-мажорантой M, семейств (плюри)субгармонических функций.

6. Теория равномерных алгебр [9]. Многочисленные применения в этой теории нашла теорема двойственности Эдвардса [9;

1.2], [10]. Конкретнее, пусть H — некоторый выпуклый конус вещественнозначных полунепрерывных сверху функций со значениями в $[-\infty,+\infty)$ на некотором компактном топологическом пространстве K, содержащий все константы. Через $\mathscr{J}_a(H)$ обозначим класс так называемых *мер Йенсена* в точке $a\in K$ относительно H, а именно: положительных мер Радона μ на K, удовлетворяющих условию

$$h(a)\leqslant\int h\,\mathrm{d}\mu\quad\text{для всех}\ \ h\in H,\quad a\in K.$$

По одной из версий Теоремы Эдвардса *для любой полунепрерывной снизу функции x справедливо равенство*

$$\sup\{h(a)\colon h\in H,\ h\leqslant x\}=\inf\left\{\int x\,\mathrm{d}\mu\colon \mu\in\mathscr{J}_a(H)\right\}. \tag{6}$$

Отсюда, в частности, следует, что *множество*

$$\{h\colon h\in H,\ h\leqslant x\}$$

непусто тогда и только тогда, когда хотя бы для одной точки $a\in K$ конечна правая часть в (6).

7. Постановка двойственной задачи. Трактовки проблем из пп. 1–5, касающиеся условий нетривиальности классов (1)–(5), можно сформулировать в следующей общей форме.

Пусть H — выпуклый конус или, более общó, выпуклое множество в векторной решетке X с отношением порядка $\leqslant$. *При каких условия для заданного элемента $x\in X$ множество*

$$\{h\in H\colon h\leqslant x\} \tag{7}$$

непусто? Если $T\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ — некоторый функционал на X, то *класс* (7) *непуст тогда и только тогда, когда выполнено соотношение*[2]

$$-\infty<\sup\{T(h)\colon h\in H,\ h\leqslant x\}=:q_{H,T}(x).$$

В более общей постановке рассмотрим произвольный функционал

$$q\colon X\longrightarrow[-\infty,\infty].$$

[2]Как обычно, $\sup\varnothing:=-\infty$ и $\inf\varnothing:=+\infty$ для пустого множества $\varnothing$.

Напомним, что функционал $A\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ называется *аффинным*, если

$$A\bigl(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\bigr)=\lambda A(x_1)+(1-\lambda)A(x_2) \text{ для всех } \lambda\in\mathbb{R} \text{ и } x_1,x_2\in X.$$

Через X^{aff} обозначим класс всех аффинных функционалов на X.

Функционал $q\colon X\longrightarrow[-\infty,\infty]$ *допускает двойственное представление* (сверху) на $x\in X$, если

$$q(x)=\inf\{A(x)\colon A\in X^{\mathrm{aff}},\ q(x')\leqslant A(x') \text{ для всех } x'\in X\}.$$

Для *суперлинейного* функционала $q\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ такое представление верно на всех $x\in X$ [10; **III.1.3**.VII], что легко выводится из теоремы Хана–Банаха. При этом класс X^{aff} можно заменить на класс

$$X^{\mathrm{lin}}:=\{A\in X^{\mathrm{aff}}\colon A(0)=0\}$$

всех линейных функционалов на X. Но проблема сразу же возникает, если функционал q может принимать значения $\pm\infty$ [1], [11].

Этот случай, большей частью для специальных функционалов

$$q=q_{H,T}\colon x\mapsto\sup\{T(h)\colon h\in H, h\leqslant x\},$$

где $T\in X^{\mathrm{lin}}$, и будет здесь обсуждаться.

2. Условия двойственного представления

Пусть $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность векторных решеток над $\mathbb{R}$ и $\leqslant_n$ — отношение порядка на X_n. Проекцию вектора $x=(x_n)$ из векторного пространства-произведения $\prod_n X_n$ на пространство X_n обозначаем через $\mathrm{pr}_{\,n}x=x_n$. На $\prod_n X_n$ вводится естественный порядок $\leqslant$, а именно: $x=(x_n)\leqslant x'=(x'_n)$ в $\prod_n X_n$ если и только если $x_n\leqslant_n x'_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Нулевой элемент различных векторных пространств обозначаем одним и тем же символом 0, что, надеемся, не должно вызвать разночтений.

Положительность всюду понимается как $\geqslant 0$, а монотонность — как монотонное возрастание.

1. Проективный предел. Пусть p_n — линейные монотонные, т.е. положительные, отображения X_{n+1} в X_n. Подпространство X в $\prod_n X_n$, элементы которого x удовлетворяют условию

$$\mathrm{pr}_{\,n}x=p_n(\mathrm{pr}_{\,n+1}x),\quad n=1,2,\dots, \tag{8}$$

снабженное индуцированным с векторной решетки $\prod_n X_n$ отношением порядка $\leqslant$, называем[3] *проективным пределом последовательности векторных решеток* X_n *относительно отображений* p_n и обозначаем его как $X = \varprojlim X_n p_n$. Из (8) видно, что

$$p_n(\mathrm{pr}_{\,n+1}B) = \mathrm{pr}_{\,n}B, \quad B \subset X.$$

Проективный предел $X = \varprojlim X_n p_n$ векторных решёток X_n называем *правильным*, если каждое отображение p_n сохраняет точную верхнюю грань для конечных множеств (является решеточным гомоморфизмом), то есть для любого конечного множества $B_{n+1} \subset X_{n+1}$ выполнено

$$X_n\text{-}\sup p_n(B_{n+1}) = p_n(X_{n+1}\text{-}\sup B_{n+1}),$$

где X_n-sup — операция *"точная верхняя грань"* на X_n.

Проективный предел $X = \varprojlim X_n p_n$ называем *приведённым*, если для каждого n проекция $\mathrm{pr}_{\,n}X$ совпадает с X_n. Без ограничения общности можно считать любой проективный предел приведённым.

Примерами классических векторных решеток, которые можно рассматривать как проективный предел, являются пространства $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ и $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$ (над полем $\mathbb{R}$) соответственно непрерывных и локально интегрируемых по положительной мере Радона μ функций со значениями в $[-\infty, +\infty]$ на локально компактном хаусдорфовом σ-компактном пространстве Ω с каноническими отношениями порядка. Действительно, существует последовательность (Ω_n) относительно компактных в Ω подмножеств, образующих покрытие Ω с замыканием $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$C_{\mathbb{R}}(\Omega) = \varprojlim C_{\mathbb{R}}(\overline{\Omega}_n) p_n \ , \qquad L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu) = \varprojlim L^1(\,\overline{\Omega}_n, \mu) p_n \tag{9}$$

— правильные приведённые пределы векторных решёток относительно операторов сужения p_n функций с $\overline{\Omega}_{n+1}$ на $\overline{\Omega}_n$.

2. Функционалы. Пусть $X = \varprojlim X_n p_n$ — правильный приведённый проективный предел векторных решёток X_n. Класс всех положительных линейных функционалов из X^{lin} обозначаем $X^{\mathrm{lin}\,+}$.

Для любого функционала $T \in X^{\mathrm{lin}\,+}$ существует свой номер $n(T) \in \mathbb{N}$ и последовательность $(T_n) \subset X_n^{\mathrm{lin}\,+}$, $n \geqslant n(T)$, для которой

$$T(x) = T_n(\mathrm{pr}_{\,n} x) \ , \quad x \in X \ , \tag{10}$$

[3]Используется также термин "обратный спектр".

при всех $n \geqslant n(T)$. Обратно, если $T_n \in X_n^{\mathrm{lin}\,+}$, то соотношение (10) определяет линейный положительный функционал T на X.

Для классических векторных решеток из (9) это отражает тот известный факт, что линейные положительные функционалы на этих пространствах имеют компактный носитель.

3. Представление для супремальных функционалов. Вернемся к рассмотрению нашего основного типа функционалов

$$q_{H,T} : x \mapsto \sup\{T(h) : \ h \leqslant x, \ h \in H\}, \quad x \in X \ .$$

где $T \in X^{\mathrm{lin}\,+}$ — фиксированный функционал.

Подмножество H в упорядоченном векторном пространстве X минорирующее для $Y \subset X$, если для любого $y \in Y$ найдется $h \in H$, удовлетворяющее неравенству $h \leqslant y$.

Теорема 1. *Пусть Y — векторное подпространство в проективном пределе $X = \varprojlim X_n p_n$ с индуцированным на нём с X отношением порядка $\leqslant$, $T \in X^{\mathrm{lin}\,+}$, а выпуклый конус $H \subset X$ содержит отрицательный элемент.*

Допустим, что для каждого n конус $H_n = \mathrm{pr}_{\,n} H$ — минорирующий в X_n для $Y_n = \mathrm{pr}_{\,n} Y$, и выполнены следующие условия:

1) *для любой ограниченной сверху в X последовательности $(h^{(n)}) \subset H$ существует $\sup\limits_n h^{(n)} \in H$;*

2) *для любой убывающей ограниченной снизу в X последовательности $(v^{(k)}) \subset H$ существует $\inf\limits_k v^{(k)} \in H$;*

3) *для любой убывающей в X последовательности $(v^{(k)}) \subset H$*

$$T(\inf_k v^{(k)}) \geqslant \inf_k T(v^{(k)}) \,,$$

где для неограниченной снизу последовательности $\{v^{(k)}\} \subset H$ полагаем $\inf\limits_k v^{(k)} = -\infty$ и $T(-\infty) = -\infty$.

Тогда супремальный функционал $q_{H,T}$ допускает двойственное представление на Y, т. е.

$$q_{H,T}(y) = \inf\{S(y) \ : \ S \in X^{\mathrm{lin}\,+}, \ T(h) \leqslant S(h) \text{ для всех } h \in H\}, \quad y \in Y \ . \tag{11}$$

4. Топологическая версия. Для формулировки топологического варианта теоремы о двойственном представлении супремального функционала нам потребуется понятие решётки Фреше [12].

Пусть X — векторная решётка. Для $x \in X$, как обычно, полагаем $|x| = \sup\{-x, x\}$ — абсолютная величина элемента x. Если к тому же X — полное метризуемое локально выпуклое пространство, т. е. пространство Фреше, и обладает базисом окрестностей нуля таким, что для любой окрестности нуля V из этого базиса при любом $x \in V$ неравенство $|y| \leqslant |x|$ влечёт $y \in V$, то X называется *решёткой Фреше.* Известно, что решётка Фреше — упорядоченное локально выпуклое пространство, т.е. конус положительных элементов в нём замкнут [12; гл. V, 7.2]. Кроме того, если p — линейное отображение решётки Фреше в решётку Фреше, то p непрерывно [12; гл. V, 6.4, 6.1] В частности, непрерывны линейные положительные функционалы на решётке Фреше. Таким образом, если $X = \varprojlim X_n p_n$ — приведённый проективный предел решёток Фреше, то отображения p_n непрерывны и порождают на X топологию проективного предела [12, гл. II], [13]. Топология на X определяется как индуцированная с топологического произведения $\prod_n X_n$. Если проекции pr_n рассматривать как определённые на X, то pr_n — линейные непрерывные отображения и в качестве базиса окрестностей нуля в X можно взять прообразы $\mathrm{pr}_n^{-1}(V_n)$ всевозможных окрестностей нуля V_n пространств X_n. Пространство X как топологический проективный предел локально выпуклых хаусдорфовых пространств также будет локально выпуклым и хаусдорфовым.

Подмножество H в локально выпуклом пространстве называется *секвенциально замкнутым*, если для любой сходящейся последовательности элементов из H её предел принадлежит H.

Подмножество B в локально выпуклом пространстве называется *секвенциально предкомпактным*, если любая последовательность элементов из B содержит сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 2. *Пусть* $X = \varprojlim X_n p_n$ — *правильный приведённый проективный предел решёток Фреше* X_n, *и* Y — *векторное подпространство в* X *с индуцированным на нём с* X *отношением порядка* $\leqslant$, $T \in X^{\mathrm{lin}\,+}$, *выпуклый конус* $H \subset X$ *секвенциально замкнут в* X *и содержит отрицательный элемент. Допустим, что для каждого* n *конус* $H_n = \operatorname{pr}_n H$ — *минорирующий для* $Y_n = \operatorname{pr}_n Y$, *и выполнено следующее условие:*

(**R**) *для любого не более чем счётного подмножества* $B \subset H$, *ограниченного сверху и удовлетворяющего условию* $\inf T(B) > -\infty$, *при каждом* $n \geqslant n(T)$ *проекция* $\operatorname{pr}_n B$ *секвенциально предкомпактна в* X_n.

Тогда $q_{H,T}$ *допускает двойственное представление* (11) *на* Y.

5. Усовершенствования — 2009–2010. В последнее время удалось значительно расширить область применимости Теорем 1 и 2.

1. Заключение (11) Теорем 1 и 2 справедливы не только на Y, но и для всех $y \in Y^{\uparrow}$, где через $Y^{\uparrow}$ обозначен множество всех векторов $x \in X$, являющихся точными верхними гранями (пределами) возрастающих последовательностей из Y. Этот совместный с В. В. Картак результат анонсирован в [14]. Доказательство основано на варианте теоремы о минимаксе (перестановке операций sup и inf) и пока неопубликовано. Теперь уже Теорема Эдвардса и некоторые ее версии из [7]–[10], [16]–[19] для конуса (плюри)субгармонических функций содержатся в усиленном варианте Теоремы 1 для $Y^{\uparrow}$. Первоначальная её формулировка охватывала только случай непрерывной функции x.

2. Теоремы 1 и 2 справедливы и для выпуклых множеств H на классе $Y^{\uparrow}$, если в правой части (11) заменить $X^{\mathrm{lin}\,+}$ на X^{aff}. В этом случае функционал $q_{H,T}$ лишь вогнутый. Здесь возможны два доказательства. Первое использует теорему Хана–Банаха для вогнутых функционалов [20–21], а второе основано на одном методе Хёрмандера продолжения вогнутых функционалов на X как суперлинейных на $X \times \mathbb{R}$. Метод этот достаточно подробно изложен в [22] по иному поводу. Полное доказательство мы также предполагаем изложить в ближайшее время.

3. Некоторые результаты в традиционных терминах

В этом разделе приводятся результаты, которые получены или могут быть доказаны на основе общего подхода, описанного выше. Предпочтение отдано тем из них, которые имеют достаточно простую формулировку, не требующую длительной подготовки.

1. Решение проблемы Рубела–Тейлора. Пусть $F \in \mathrm{Mer}\,(\mathbb{C}^n)$, $F(0) = 0$. Проблему Рубела–Тейлора (1968 г.) в несколько отшлифованной форме можно сформулировать в следующем виде (см. обзор [23]): *дать представление функции $F = g/q$ так, чтобы функция $u_F = \log\max\{g, q\}$ или $u_F = \log\sqrt{|g|^2 + |q|^2}$ по возможности наилучшим образом мажорировалась характеристикой Неванлинны T_F*. В случае $n = 1$ достаточно оптимальный ответ был дан Дж. Майлзом: *для любой $F \in \mathrm{Mer}\,(\mathbb{C})$ существует представление $F = g/q$, где функции $g, q \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{C})$ удовлетворяют ограничению*

$$u_F(z) \leqslant \mathrm{const}_F\, T_F\big(2|z|\big), \quad z \in \mathbb{C},$$

где const — это постоянная, зависящая только от индексов.

Методы, обсуждаемые здесь, позволили дать решение проблемы Рубела–Тейлора через более чем 30 лет после ее постановки.

Теорема 3. *Пусть $F \in \mathrm{Mer}\,(\mathbb{C}^n)$ и функция $\varepsilon\colon [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ убывающая и дифференцируемая на $(r_0, +\infty)$, а для ее производной ε' выполнено условие*

$$\liminf_{r \longrightarrow +\infty} r\varepsilon'(r) > -\infty. \tag{12}$$

Найдется представление $F = g/q$, в котором функции $g, q \in \mathrm{Hol}\,(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяют условию

$$\max\{u_F(z)\colon |z| = r\} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^n(r)}\, T_F\big((1 + \varepsilon(r))r\big)\right), \quad r \longrightarrow +\infty.$$

Для случая постоянной функции $\varepsilon \equiv \mathrm{const}$ при $n > 1$ и для функции ε, удовлетворяющей условию (12), при $n = 1$ доказательство этого результата опубликовано (см. обзор [23]), а для $n > 1$ доказательство общего случая предполагается оформить в ближайшее время. В обзоре [23] можно найти и ряд других результатов этого направления. Аналог Теоремы 3 установлен теми же методами и для функций, мероморфных в круге [24].

2. Полнота систем экспонент на отрезке. Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}$ — последовательность в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ без предельных точек в Ω,

$$n_\Lambda\colon B\mapsto\sum_{\lambda_k\in B}1,\quad B\subset\Omega,$$

— *считающая мера последовательности* Λ. Функция $f\in\operatorname{Hol}(\Omega)$ *обращается в нуль на* Λ, если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda\in\Omega$ не больше числа $n_\Lambda(\lambda):=n_\Lambda\bigl(\{\lambda\}\bigr)$. Для векторного подпространства $H\subset\operatorname{Hol}(\Omega)$ последовательность Λ называем *подпоследовательностью нулей,* или *последовательностью неединственности, для* H, если существует ненулевая функция $f\in H$, обращающаяся в нуль на Λ. В противном случае Λ — *последовательность единственности для* H. В этом подпункте используем только случай $\Omega=\mathbb{C}$. Каждой последовательности Λ в $\mathbb{C}$ сопоставим систему (кратных) экспонент

$$\operatorname{Exp}^\Lambda:=\{z\mapsto z^{p-1}e^{\lambda z}\colon z\in\mathbb{C},\ \lambda\in\Lambda,\ 1\leqslant p\leqslant n_\Lambda(\lambda),\ p\in\mathbb{N}\}.\tag{13}$$

Под системой $\operatorname{Exp}^\Lambda$ *на подмножестве* $S\subset\mathbb{C}$ понимаем, как обычно, систему из сужений функций из (13) на S.

Через $I_d\subset\mathbb{R}$ (соответственно $\overline{I}_d$) обозначаем открытый (соответственно замкнутый) интервал длины d. Система $\operatorname{Exp}^\Lambda$ *полна на отрезке* $\overline{I}_d\subset\mathbb{R}$, если замыкание ее линейной оболочки (над $\mathbb{C}$) в банаховом пространстве $C_{\mathbb{C}}(\overline{I}_d)$ непрерывных комплекснозначных функций с обычной sup-нормой совпадает с $C_{\mathbb{C}}(\overline{I}_d)$. Аналогично определяется полнота в классических пространствах $L^p(I_d)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$.

Для $a\in(0,+\infty)$ через B_a обозначим *пространство Бернштейна* (типа a) всех целых функций f, т. е. $f\in\operatorname{Hol}(\mathbb{C})$, для которых имеет место ограничение $|f(z)|\leqslant\operatorname{const}_f\,\exp(a|\operatorname{Im}z|),\quad z\in\mathbb{C}$. Другое эквивалентное описание пространства Бернштейна B_a — класс целых функций экспоненциального типа f не выше a, т. е. удовлетворяющих условиям $\limsup\limits_{z\longrightarrow\infty}\frac{\log|f(z)|}{|z|}\leqslant a$, ограниченных на вещественной оси $\mathbb{R}$.

Нетрудно показать, что если Λ — последовательность единственности для пространства B_a, то система $\operatorname{Exp}^{i\Lambda}$ полна на любом отрезке длины $2a$ и в любом пространстве $L^p(I_{2a})$. Обратно, если Λ — последовательность неединственности для B_a, то для любой пары точек $\{\lambda',\lambda''\}\subset\Lambda$ система $\operatorname{Exp}^{i\Lambda\setminus\{i\lambda'\}}$ не полна на отрезке длины $2a$ и в пространствах $L^p(I_{2a})$ при $p\geqslant 2$, а система $\operatorname{Exp}^{i\Lambda\setminus\{i\lambda',\,i\lambda''\}}$— в пространствах $L^p(I_{2a})$ при $1\leqslant p<2$.

Положительность всюду понимается нестрого как $\geqslant 0$. Аналогичное соглашение — для отрицательности: $\leqslant 0$.

Так же нестрого понимается *возрастание* и *убывание*. Так, функция $\phi\colon I \longrightarrow [-\infty, +\infty]$, $I \subset [-\infty, +\infty]$, *возрастающая* (соотв. *убывающая*), если для любых $x_1, x_2 \in I$ неравенство $x_1 \leqslant x_2$ влечет за собой *нестрогое* неравенство $\phi(x_1) \leqslant \phi(x_2)$ (соотв. $\phi(x_1) \geqslant \phi(x_2)$).

Для формулировки полного описания последовательностей (не)единственности для B_a потребуется специальный *класс тестовых* (основных) *функций* $\mathscr{P}_0^\infty$, состоящий из всех *положительных бесконечно дифференцируемых функций*

$$p\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow [0, +\infty)$$

с *условием финитности*

$$p(x) \equiv 0 \text{ при } |x| \geqslant \mathrm{const}_p > 0, \tag{14}$$

и обладающих ещё и следующими двумя свойствами:

1) имеет место *условие нормировки*

$$\limsup_{t \longrightarrow 0} \frac{p(t)}{-\log|t|} = 1; \tag{15}$$

2) выполнено *сопряженное условие положительности*

$$\fint_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{p(t) - p(x)}{(t-x)^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \text{ для всех } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{16}$$

, где “перечеркнутый” интеграл используется здесь и далее для обозначения главного значения интеграла в смысле Коши.

Будут использованы значения в точках λ_k *интеграла Пуассона* $\mathrm{P}_{\pm\mathbb{C}}\, p$ от функции $p \in \mathscr{P}_0^\infty$

$$(\mathrm{P}_{\pm\mathbb{C}} p)(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda|}{(t - \mathrm{Re}\,\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\,\lambda)^2}\, p(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \neq 0, \tag{17}$$

в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}\, z > 0\}$ и $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}\, z < 0\}$, который для $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ полагаем равным значению в точке λ функции $p \in \mathscr{P}_0^\infty$, т. е.

$$(\mathrm{P}_{\pm\mathbb{C}} p)(\lambda) := p(\lambda) \text{ при } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Теорема 4. *Последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \not\ni 0$ — *последовательность единственности для пространства* B_a, *если и только если*

$$\sup_{p\in\mathscr{P}_0^\infty}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{P}_{\pm\mathbb{C}}p)(\lambda_k) - \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,\mathrm{d}t\right) = +\infty. \tag{18}$$

Вследствие условия нормировки (15) никаких проблем со сходимостью интеграла Пуассона (17) в нуле не возникает. Кроме того, ограничение $0 \notin \Lambda$ не умаляет общности критерия, поскольку любые сдвиги любого конечного числа точек из Λ не меняют его свойства быть или не быть последовательностью (не)единственности (см. [5]).

В случае вещественной последовательности $\Lambda \not\ni 0$ имеем

Следствие 1. *Последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $0 \notin \Lambda$, — *последовательность единственности для* B_a *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{p\in\mathscr{P}_0^\infty}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda) - \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,\mathrm{d}t\right) = +\infty. \tag{19}$$

Обсуждавшиеся выше условия полноты систем экспонент в терминах последовательностей (не)единственности для пространства B_a дают

Следствие 2. *Если для последовательности точек* $\Lambda \subset \mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$, *выполнено условие* (18) *или при ограничении* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *условие* (19), *то система* $\mathrm{Exp}^{i\Lambda}$ *полна на любом отрезке длины* $2a$ *и в любом пространстве* $L^p(I_{2a})$. *Обратно, если левая часть в* (18) *или при дополнительном ограничении* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *в* (19) *конечна, то для любой пары точек* $\{\lambda', \lambda''\} \subset \Lambda$ *система* $\mathrm{Exp}^{i\Lambda\setminus\{i\lambda'\}}$ *не полна на отрезке длины* $2a$ *и в пространствах* $L^p(I_{2a})$ *при* $p \geqslant 2$, *а система* $\mathrm{Exp}^{i\Lambda\setminus\{i\lambda', i\lambda''\}}$ — *в пространствах* $L^p(I_{2a})$ *при* $1 \leqslant p < 2$.

Из формулировок Теоремы 4 и Следствий видно, что любая замена класса тестовых функций $\mathscr{P}_0^\infty$ на бо́льший класс при условии сохранения формулировок Теоремы 4 и Следствия позволяет расширить множество достаточных условий для последовательностей единственности и для полноты систем экспонент, а его уменьшение сужает множество достаточных условий для последовательностей неединственности или облегчает проверку того, что система экспонент имеет избыток $\leqslant 0$ или $\leqslant 1$ (по поводу понятия избытка см. [5]). Расширение класса тестовых функций $\mathscr{P}_0^\infty$ не составляет особого труда, чего нельзя сказать об его сужении.

Для расширения класса $\mathscr{P}_0^\infty$ пользуемся классическим *преобразованием Гильберта* H_0, действующим на произвольные функции $p \in L^1(\mathbb{R})$ по правилу

$$(\mathrm{H}_0 p)(x) := \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{p(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t.$$

Класс $\mathscr{P} \supset \mathscr{P}_0^\infty$ – это все *положительные непрерывные функции*

$$p\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow [0,+\infty), \quad p \in L^1(\mathbb{R}),$$

с *условием нормировки* (15), удовлетворяющие *сопряженному условию монотонности:* преобразование Гильберта $\mathrm{H}_0 p$ определено и конечно всюду на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и является *убывающей функцией на* $(0,+\infty)$ *и на* $(-\infty,0)$. Теорема 1 и Следствия из неё остаются в силе и после замены в их формулировках класса $\mathscr{P}_0^\infty$ на более широкий класс $\mathscr{P}$.

Задача уменьшения тестового класса $\mathscr{P}_0^\infty$ гораздо более деликатная. Здесь возможно комбинирование двух близких подходов: описание экстремальных элементов для классов $\mathscr{P}_0^\infty$ и(или) $\mathscr{P}$, а также подбор подклассов в этих классах, выпуклые комбинации функций из которых плотны в $\mathscr{P}_0^\infty$ или $\mathscr{P}$ в подходящей топологии.

Доказательства приведенных результатов из этого подраздела существенно опираются на работы [25; § 7], [5; Теорема 2.1.20], [1].

Ряд других результатов в традиционных терминах, основанных на описанном в начале методе можно посмотреть в [1–6], [23–25].

Литература

1. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I, II // Известия РАН. Серия математическая.—2001.—Т. 65, № 4.—С. 205–224;—Т. 65, № 5.—С. 167–190.
2. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Математический сборник.—2007.—Т. 198, № 2.—С. 121–160.
3. *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I, II // Алгебра и анализ.— 2008.—Т. 20, № 1. С. 146–236.
4. *Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н.* Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций // Математический сборник.—2009.—Т. 200, № 9.—С. 95–126.
5. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности (издание второе дополненное).—Уфа: РИЦ БашГУ, 2008.—С. 188.
6. *Koosis P.* Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin.—Montréal: Les Publications CRM, 1996.—C 230.

7. *Poletsky E. A.* Holomorphic Currents // Indiana University Mathematical Journal. —1993.—V. 42, No. 1.—P. 85–144.
8. *Poletsky E. A., Sigurdsson R.* Dirichlet problems for plurisubharmonic functions on compact sets // arXiv: 1005.0248v1 [math.CV]—2010.—P. 16.
9. *Gamelin T. W.* Uniform Algebras and Jensen Measures. —Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.—P. 65.
10. *Edwards D. A.* Choquet boundary theory for certain spaces of lower semicontinuous functions // Function Algebras (Proc. Inter. Symp. on Func. Alg., Tulane Univ., 1965). —Chicago: Scott-Foresman, Ill., 1966.—P. 300–309.
11. *Фельдман М. М.* О сублинейных операторах, определённых на конусе // Сибирский математический журнал.—1975.—Т. 16, № 6.—С. 1308–1321.
12. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—С. 368.
13. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.
14. *Себаштьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Сб. Математика.—1957.—Т. I, № 1.—С. 60–77.
15. *Картак В. В., Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление функционалов на проективных пределах векторных решеток // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 1Ч7 июля 2009 г.).—Казанское математическое общество, 2009.—Т. 38.—С. 146–148.
16. *Bu S., Schachermayer W.* Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications // Trans. Amer. Math. Soc.—1992.—V. 331, No. 2.— P. 585–608.
17. *Cole B. J., Ransford T. J.* Subharmonicity without Upper Semicontinuity // J. Funct. Anal.—1997.—V. 147.— P. 420–442.
18. *Larusson F., Sigurdsson R.* Plurisubharmonic functions and analytic discs on manifolds // J. reine angew. Math.—1998.—V. 501.—P. 1–39.
19. *Poletsky E. A.* Disk envelopes of functions. II // J. Funct. Anal.—1999.—V 163.—P. 111–132.
20. *Weston J. D.* A Note on the Extension of Linear Functional // Amer. Math. Monthly.—1960.—V. 67, No. 5.—P. 444–445.
21. *Nakano H.* On an extension theorem // Proc. Japan Acad.—1959.—V. 35.—P. 127.
22. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и еҷ приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.
23. *Khabibullin B. N.* The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results // Математическая физика, анализ, геометрия (Украина).—2002.—Т. 9, № 2.—С. 146-167; Electronic Archive at LANL. 24 pages.—http://arxiv.org/abs/math.CV/0502433.
24. *Хабибуллин Б. Н.* Нулевые подмножества, представление мероморфных функций и характеристики Неванлинны в круге // Математический сборник.—2006.—Т. 197, № 2.—С. 117–136.
25. *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Известия АН СССР. Серия математическая.—1991.—Т. 55, № 5.—С. 1101–1123.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Башкирский государственный университет
заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии, профессор
450074, г. Уфа, ул. З. Валиди, 32, математический факультет
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru

APPLICATIONS IN COMPLEX ANALYSIS OF DUAL REPRESENTATION OF FUNCTIONALS ON VECTOR LATTICES

Khabibullin Bulat Nurmievich

In this brief review we consider problems of complex analysis and potential theory connected with the existence of dual representation for functionals on the vector lattices. We give some sufficient conditions to have such a representation. Besides we formulate some results on representations of meromorphic functions and on completeness of exponential systems on a segment. They can be established at this moment only by means of this dual representation.