

НУЛИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ В ОБЛАСТИ

Б. Н. Хабибуллин

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в области Ω комплексной плоскости. В терминах гармонических мер и функций Грина получены условия, при которых Λ — подпоследовательность нулей для некоторой голоморфной функции с заданными ограничениями на рост в Ω . В аналогичных терминах рассмотрен вопрос о представлении мероморфной в Ω функции в виде отношения двух голоморфных функций из заданного весового класса.

Пусть H — некоторое весовое пространство голоморфных функций в области Ω комплексной плоскости \mathbb{C} , выделяемое поточечными ограничениями на эти функции посредством некоторой системы мажорант M . Настоящая работа нацелена на построение единой схемы решения двух задач:

- (S) какие последовательности точек Λ могут быть подпоследовательностью нулей некоторой функции из H , т. е. *подпоследовательностью нулей для H* ?
- (M) когда мероморфная в Ω функция может быть представлена отношением двух голоморфных функций из H ?

Здесь эта схема строится в терминах классических гармонических мер и функций Грина в отличие от предыдущих наших работ (см. список литературы), где подобная модель формулировалась в менее явных терминах мер и потенциалов Йенсена.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 09-01-00046_а и 08-01-97023-р_поволжье_а, а также программы господдержки ведущих научных школ РФ, проект НШ–3081.2008.1.

1. Обозначения, соглашения и основные понятия. Как обычно, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} и \mathbb{C} — множества соответственно всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел или их геометрические интерпретации.

Для отображения $f: A \rightarrow B$ и $b \in B$ пишем $f \equiv b$ на A' , если f тождественно равно b на подмножестве $A' \subset A$; в противном случае $f \not\equiv b$ на A' . Как обычно, для $A' \subset A$ через $f|_{A'}$ обозначаем сужение f на A' . «Положительность» (соответственно «отрицательность») всегда означает “ ≥ 0 ” (соответственно “ ≤ 0 ”).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — не более чем счетная последовательность точек в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ без предельных точек в Ω . Среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. Возможно, что $\Lambda = \emptyset$ — пустое множество. С каждой последовательностью Λ ассоциируем целочисленную положительную считающую меру n_Λ на Ω по правилу

$$n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1, \quad S \subset \Omega,$$

— число точек λ_k , содержащихся в S . Отходя от традиционного понимания последовательности как функции натурального или целого аргумента, считаем, что последовательность Λ совпадает с последовательностью $\Gamma = \{\gamma_k\}$, или равна ей (пишем $\Lambda = \Gamma$), если $n_\Lambda = n_\Gamma$. Иначе говоря, каждая последовательность точек рассматривается как представитель некоторого класса эквивалентности, состоящего из последовательностей в Ω с одинаковыми ассоциированными целочисленными мерами. Включение $\Lambda \subset \Gamma$ означает, что $n_\Lambda \leq n_\Gamma$.

Носитель $\text{supp } \Lambda$ для последовательности точек Λ — это носитель $\text{supp } n_\Lambda$ ассоциированной с ней меры. Запись $\lambda \in \Lambda$ (соответственно $\lambda \notin \Lambda$) означает, что $\lambda \in \text{supp } \Lambda$ (соответственно $\lambda \notin \text{supp } \Lambda$). Для подмножества $B \subset \mathbb{C}$ пишем $\Lambda \subset B$, если $\text{supp } \Lambda \subset B$.

Через $\text{Hol}(\Omega)$ обозначаем класс всех голоморфных функций в области $\Omega \subset \mathbb{C}$. По функции $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ определим класс

$$\text{Hol}(\Omega; M) := \left\{ f \in \text{Hol}(\Omega) : \sup_{z \in \Omega} \frac{|f(z)|}{\exp M(z)} < +\infty \right\}.$$

Пусть $f \in \text{Hol}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ на Ω . Последовательность нулей функции f в Ω , перенумерованную с учетом кратности, обозначаем через Zero_f . Последовательность Λ — **последовательность нулей** для подкласса $H \subset \text{Hol}(\Omega)$, если найдется функция $f \in H$ такая, что $\Lambda = \text{Zero}_f$. Функция $f \in \text{Hol}(\Omega)$ *обращается в нуль на* Λ , если $\Lambda \subset \text{Zero}_f$ (пишем $f(\Lambda) = 0$). Последовательность Λ — **подпоследовательность нулей** для подкласса $H \subset \text{Hol}(\Omega)$, если существует функция $f \not\equiv 0$ на Ω из класса H , обращающаяся в нуль на Λ .

Через t обозначаем *лебегову меру* на \mathbb{C} , а иногда, когда это ясно из контекста, и ее сужения на подмножества из \mathbb{C} .

Пишем $S \Subset \Omega$ и говорим, что S *предкомпактно* в Ω , если *замыкание* \bar{S} подмножества $S \subset \Omega$ — компакт в Ω .

Для области $D \Subset \mathbb{C}$, через $g_D(\cdot, z)$ обозначаем *продолженную функцию Грина* для D с полюсом в точке $z \in D$ [1; п. 5.7.4], т. е. $g_D(\zeta, z) \equiv 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$ и $g(\zeta, z)$ — субгармоническая функция от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$, гармоническая по ζ в $\Omega \setminus \{z\}$. Соответственно, $\omega_D(z, \cdot)$ — *гармоническая мера в точке z относительно $D \Subset \mathbb{C}$* [1; п. 5.7.1].

Как обычно, $C(S)$ — пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на множестве $S \subset \mathbb{C}$. Через $\mathcal{M}(S)$ обозначаем множество всех вещественных борелевских мер (мер Радона) на борелевском множестве S (на $C(S)$).

Интегралы от функций со значениями в $[-\infty, +\infty]$ по положительной мере ν понимаются в широком смысле, т. е. могут принимать значения из $[-\infty, +\infty]$, как в [1], но функция *интегрируема по мере ν* , если интеграл от нее по мере ν конечен.

Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Как обычно, $\text{supp } \mu$ — *носитель* меры μ . Мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ *сосредоточена на борелевском подмножестве $B \subset \Omega$* , если $\mu(\Omega \setminus B) = 0$. Для борелевского множества $B \subset \Omega$ *сужение меры μ на B* обозначается $\mu|_B$.

Через $D(z, t)$ обозначаем открытый круг радиуса $t \in \mathbb{R}$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$. Если $t \leq 0$, то $D(z, t) = \emptyset$. По определению $D(t) := D(0, t)$. *Единичный круг $D(1)$* обозначаем через \mathbb{D} .

Для $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ и $D(t) \subset \Omega$ полагаем $\nu^{\text{rad}}(t) := \nu(D(t))$.

Через $SH(\Omega)$ обозначаем конус всех субгармонических функций на Ω . Функция, тождественно равная $-\infty$ на Ω , по определению принадлежит $SH(\Omega)$. Для $u \in SH(\Omega)$ при $u \not\equiv -\infty$ на Ω через¹ $\nu_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u$ обозначаем *меру Рисса* функции u .

Как обычно, $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ — множество всех локально интегрируемых по мере Лебега t функций $F: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$.

Через $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ обозначаем функцию евклидова расстояния между точками или множествами в \mathbb{C} . В частности, $\text{dist}(z, \partial\Omega)$ — евклидово расстояние от точки $z \in \mathbb{C}$ до *границы $\partial\Omega$* области Ω .

Всюду далее мера $m^{(r)} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ — это сужение меры Лебега t

¹Здесь Δ — оператор Лапласа, действующий в смысле теории распределений, или теории обобщенных функций.

на круг $D(r)$, нормированное условием $m^{(r)}(D(r)) = 1$, т. е.

$$m^{(r)} := \frac{1}{m^{\text{rad}}(r)} m \Big|_{D(r)}.$$

В частности, по определению субгармонической функции

$$v(z) \leq (v * m^{(r)})(z), \quad v \in SH(\Omega),$$

если $z + D(r) = D(z, r) \Subset \Omega$ (здесь и ниже $*$ обозначает *свертку*).

Допустим, что функция $r: \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяет ограничениям $0 < r(z) < \text{dist}(z, \partial\Omega)$, $\forall z \in \Omega$. Тогда для функции $F \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ можем определить ее переменное усреднение

$$F^{(r)}(z) := \int_{D(r(z))} F(z+w) dm^{(r(z))}(w), \quad z \in \Omega,$$

которое при дополнительном условии $\sigma \in C(\Omega)$ также непрерывно.

Далее область в \mathbb{C} *регулярна*, если для нее разрешима классическая задача Дирихле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть Ω — область в \mathbb{C} , $0 \in \Omega$, а $S_0 \Subset \Omega$ и также $0 \in S_0$. Систему *регулярных* областей $\mathcal{U}_{S_0}(\Omega) \subset \{D \Subset \Omega: S_0 \subset D\}$ называем *регулярной оптимально исчерпывающей в Ω* (с центром S_0), если для любых двух областей Ω_1 и Ω_2 при $S_0 \subset \Omega_1 \Subset \Omega_2 \subset \Omega$ выполнены два условия:

- 1) можно подобрать область $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ такую, что $\Omega_1 \Subset D \Subset \Omega_2$ и каждая непустая ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus D$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \Omega_2$;
- 2) для любой области $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ найдется область $\Omega_D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ такая, что $\Omega_1 \Subset \Omega_D \Subset \Omega_2$, и объединение $\Omega_D \cup D$ также принадлежит $\mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$;

а кроме того, эта система *условно инвариантна относительно сдвига в Ω* , т. е. из $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$, $w \in \mathbb{C}$ и $S_0 \subset D + w \Subset \Omega$ следует, что $D + w \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$.

Если $S_0 = \{0\}$, то используем обозначение $\mathcal{U}_0(\Omega) := \mathcal{U}_{\{0\}}(\Omega)$.

Простым примером регулярной оптимально исчерпывающей системы областей может служить *специальная система $\mathcal{U}_{S_0}^d(\Omega)$ всевозможных связных объединений $D \supset S_0$ конечного числа кругов $D(z_j, t_j) \Subset \Omega$, $j = 1, \dots, t$, исключая те области D , в дополнении $\mathbb{C} \setminus D$ которых есть изолированные точки*. С такими же исключениями круги в этом примере можно заменить на предкомпактные в

Ω всевозможные n -угольники или, более общо, односвязные подобласти какого-либо специального типа (см. [2, Пример 1]).

2. Основной результат.

Теорема (основная). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{C}$ содержит 0, $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ — регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром $K_0 \ni 0$ — связным компактом, а функция $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ принадлежит $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ и ограничена снизу в некоторой окрестности компакта K_0 .

Пусть u — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_u на Ω , $u(0) \neq -\infty$. Допустим, выполнено какое-либо из следующих трех условий:

1) $M \in C(\Omega)$ или $M \in SH(\Omega)$ и выполнено неравенство²

$$-\infty < \inf_{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)} \left(- \int_{\Omega} u(z) d\omega_D(0, z) + \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) \right);$$

2) $M \in C(\Omega)$ или $M \in SH(\Omega)$ и имеет место неравенство

$$-\infty < \inf_{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)} \left(- \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_u(\zeta) + \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) \right);$$

3) $M \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_M и справедливо неравенство

$$-\infty < \inf_{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)} \left(- \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_u(\zeta) + \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_M(\zeta) \right);$$

Тогда для любой функции $r \in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничениям $0 < r(z) < \text{dist}(z, \partial\Omega)$ при всех $z \in \Omega$, найдутся субгармоническая функция $v \not\equiv -\infty$, гармоническая в некоторой окрестности нуля, удовлетворяющая неравенству

$$u(z) + v(z) \leq M^{(r)}(z), \quad \forall z \in \Omega, \quad (1)$$

²К сожалению, в Основной теореме из нашей работы [2] допущена досадная опечатка в знаках \pm . В ее формулировке неравенства (2.11) из п. (h1) и (2.12) из п. (h2) должны выглядеть в точности как неравенства из пп. 3) и 1) соответственно. Другими словами, в [2] в (2.11) и (2.12) в скобках под операцией \inf необходимо заменить знаки перед интегралами на противоположные. Отметим, что с этими исправлениями опечаток доказательство Основной теоремы и ее следствий в [2] остаются верными без каких-либо иных изменений.

и функция $h \in \text{Hol}(\Omega)$, $h \neq 0$ на Ω , для которой

$$u(z) + \log|h(z)| \leq \inf_{0 < t < \text{dist}(z, \partial\Omega)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{(r)}(z + te^{i\theta}) d\theta + \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right) + 9 \log(1 + |z|), \quad \forall z \in \Omega. \quad (2)$$

При этом

- i) если $M \in C(\Omega)$, то переменное усреднение $M^{(r)}$ в обоих неравенствах (1), (2) можно заменить на саму функцию M ;
- ii) если $\Omega \neq \mathbb{C}$, то для любой точки $z_0 \notin \Omega$ слагаемое $9 \log(1 + |z|)$ в (2) можно заменить на слагаемое $9 |\log|z - z_0||$, а если $\bar{\Omega} \neq \mathbb{C}$, то это слагаемое можно даже отбросить;
- iii) если $\Omega = \mathbb{C}$, то для любого числа $\sigma > 0$ в правой часть (2) можно поставить просто $\sup\{M(w) : |z - w| \leq \sigma\}$.

◁ Применение классической формулы Пуассона–Йенсена из [1; п. 5.7.4] к субгармонической функции M дает импликацию 3) \Rightarrow 2), а ее применение к $u \in SH(\Omega)$ — импликацию 2) \Rightarrow 1). Далее нам потребуется определения мер Йенсена и их потенциалов, исследование свойств которых можно найти, к примеру, в [3].

Положительная мера $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ с компактным носителем в области Ω называется *мерой Йенсена* для точки $0 \in \Omega$, если

$$v(0) \leq \int_{\Omega} v d\mu, \quad \forall v \in SH(\Omega).$$

Через $\mathcal{J}(\Omega)$ обозначаем класс всех мер Йенсена для $0 \in \Omega$, а для $B \subset \Omega$ множество мер $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$, для которых $B \cap \text{supp} \mu = \emptyset$, обозначаем $\mathcal{J}^B(\Omega)$.

Отметим, что мера $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$ вероятностная. *Потенциал меры* $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$ определяем как функцию

$$\zeta \mapsto V_{\mu}(\zeta) := \int \log|z - \zeta| d\mu(z) - \log|\zeta| = \int \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu(z), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Этот потенциал тождественно равен нулю вне некоторого компакта из Ω , содержащего 0 , и всюду положителен вне нуля.

В [2; § 4, п. 4.2] доказано, что условие 1) Основной теоремы влечет за собой выполнение свойства

(J) Существуют постоянная C и область $\Omega' \Subset \Omega$, содержащая центр K_0 системы $\mathcal{W}_{K_0}(\Omega)$, при которых для всех мер Йенсена $\mu \in \mathcal{J}^{\Omega'}(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V_{\mu} d\nu_{\mu} \leq \int_{\Omega} M d\mu + C,$$

а функция M ограничена в открытой окрестности $\overline{\Omega'}$.

Из условия (J) по [1; Теорема 6] следует, что найдется субгармоническая функция $v \not\equiv -\infty$, с которой выполнено (1). В силу непрерывности функции $M^{(r)}$ функцию v можно “подправить”, сохраняя (1): гармонически продолжить в круг $D(\varepsilon) \Subset \Omega$ и вычесть достаточно большую положительную постоянную.

Из [4; Лемма 1.1] следует, что найдется функция $h \in \text{Hol}(\Omega)$, $h \not\equiv 0$ на Ω , для которой при каждом $z \in \Omega$ для любого числа t , $0 < t < \text{dist}(z, \partial\Omega)$, выполнено неравенство

$$\log|h(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + te^{i\theta}) d\theta + \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) + 9 \log(1 + |z|).$$

Применяя этот факт к (1), получаем (2).

Если $M \in C(\Omega)$, то в силу локальной равномерной непрерывности M в Ω можно подобрать функцию $r \in C(\Omega)$ с требуемыми в Основной теореме ограничениями так, что $M^{(r)}(z) \leq M(z) + 1$ для всех $z \in \Omega$. Тогда, вычитая из v в (1) достаточно большую положительную постоянную или домножая в (2) функцию h на достаточно малое число $a > 0$, получаем дополнение i).

Если $\Omega \neq \mathbb{C}$ и $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, то, домножая функцию h из левой части (2) на голоморфную в Ω функцию $\frac{a}{(z-z_0)^a}$, где $a > 0$ достаточно мало, получаем первую часть утверждения ii). Заключительная его часть получается, если выбрать этот множитель при некотором $\varepsilon > 0$ с условием $D(z_0, \varepsilon) \cap \Omega = \emptyset$.

Наконец, п. iii) следует из [5; Предложение 9.2] (см. также пп. 2а), 2б) доказательства [6; Основная теорема]). \triangleright

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты Основной теоремы в ослабленной форме были анонсированы в 2006 г. в [7; Теорема 1.2.1, Дополнение 1.2.2]. Часть Основной теоремы в варианте $\Omega = \mathbb{C}$ и 1) \Rightarrow iii) было доказано в 2008 г. в [8; Теорема 1.5] на основе [6; Основная теорема].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интеграл $\int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z)$ в 1) и 2) — это значение в нуле решения классической задачи Дирихле в регулярной области $D \ni 0$ с граничными значениями $M|_{\partial D}$.

3. Применения Основной теоремы. Первая теорема в определенной степени решает задачу (S).

Теорема S. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $0 \notin \Lambda$, — последовательность точек в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей 0, $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ — регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром $K_0 \ni 0$ — связным компактом, а функция $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ принадлежит $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ и ограничена снизу в некоторой окрестности компакта K_0 . Если выполнено одно из следующих условий

1) $M \in C(\Omega)$ или $M \in SH(\Omega)$ и имеет место неравенство

$$-\infty < \inf_{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)} \left(- \sum_k g_D(\lambda_k, 0) + \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) \right);$$

2) $M \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_M и справедливо неравенство

$$-\infty < \inf_{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)} \left(- \sum_k g_D(\lambda_k, 0) + \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_M(\zeta) \right).$$

Тогда для произвольной функции $r \in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничениям $0 < r(z) < \text{dist}(z, \partial\Omega)$ при всех $z \in \Omega$, Λ — подпоследовательность нулей для класса $\text{Hol}(\Omega, \widehat{M})$, где

$$\widehat{M}(z) := \inf_{0 < t < \text{dist}(z, \partial\Omega)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{(r)}(z + te^{i\theta}) d\theta + \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right) + 9 \log(1 + |z|), \quad \forall z \in \Omega. \quad (3)$$

При этом справедливы уточнения i)–iii) из Основной теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неравенства из 1) и 2) в Теореме S — необходимое условие, для того чтобы последовательность Λ была подпоследовательностью нулей для класса $\text{Hol}(\Omega, M)$ (см. [2; Теорема 2]).

Вторая теорема в определенной степени решает задачу (M).

Теорема M. Пусть $f = g_0/q_0$, $g_0, q_0 \in \text{Hol}(\Omega)$, — мероморфная функция в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей 0, $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ — регулярная

оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром $K_0 \ni 0$ — связным компактом, а функция $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ принадлежит $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ и ограничена снизу в некоторой окрестности компакта K_0 . Если для функции

$$u := \max\{\log |g_0|, \log |q_0|\} \quad \text{или} \quad u = \log \sqrt{|g_0|^2 + |q_0|^2} \quad (4)$$

выполнено условие 1) из Основной теоремы, то найдутся две функции $g, q \in \text{Hol}(\Omega, \widehat{M})$, где \widehat{M} — функция из (3), с которыми справедливо представление $f = g/q$.

При этом справедливы уточнения i)–iii) из Основной теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Неравенство из условия 1) Основной теоремы применительно к функции u из (4) — необходимое, когда мероморфная функция $f \neq 0, \infty$ представима в виде $f = g/q$ с функциями $g, q \in \text{Hol}(\Omega, M)$.

Доказательства Теорем S и M опускаем, поскольку их вывод из Основной теоремы очень близок к схеме рассуждений из [5; §§ 11, 12] или [2; доказательства Теорем 2, 5]. При этом при доказательстве Теоремы S надо воспользоваться тем, что для субгармонической функции $u := \log |f_\Lambda|$, где f_Λ — голоморфная функция с $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$, распределение масс Рисса ν_u совпадает с n_Λ .

Литература

1. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции.—М.: Мир, 1980.
2. Хабибуллин Б. Н. Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Матем. сб.—2007.—Т. 198.—№ 2.—С. 121–160.
3. Хабибуллин Б. Н. Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций // Сиб. матем. журн.—2003.—Т. 4.—№ 4.—С. 905–925.
4. Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю. Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20.—№ 1.—С. 162–204.
5. Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Серия матем.—2001.—Т. 65.—№ 5.—С. 167–190.
6. Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Серия матем.—1991.—Т. 55.—№ 5.—С. 1101–1123.
7. Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. Обзор-монография.—Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. Издание второе дополненное.—Уфа: РИЦ БашГУ, 2008.—188 с.
8. Roy S. Extreme Jensen measure // Ark. Mat.—2008.—V. 46.—P. 153–182.

ХАБИБУЛЛИН БУЛАТ НУРМИЕВИЧ
Башкирский государственный университет
Россия, 450074, РБ, Уфа, ул. Фрунзе, 32
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Khabibullin B. N.
Zeros of holomorphic functions
with restrictions on growth in the domain

Let $\Lambda = \{\lambda_k\}$ be a sequence of points in a domain Ω of the complex plane. In terms of harmonic measures and Green functions conditions are obtained, under which Λ is subsequence of zeros for some nonzero holomorphic function with restrictions on growth in Ω . In similar terms the problem on representation meromorphic in Ω functions in the form of the ratio of two holomorphic functions from a weighted class is considered.