УДК 517.53; 517.547; 517.574; 517.984

НУЛИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ В ОБЛАСТИ

Б. Н. Хабибуллин

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в области Ω комплексной плоскости. В терминах гармонических мер и функций Грина получены условия, при которых Λ — подпоследовательность нулей для некоторой голоморфной функции с заданными ограничениями на рост в Ω. В аналогичных терминах рассмотрен вопрос о представлении мероморфной в Ω функции в виде отношения двух голоморфных функций из заданного весового класса.

Пусть H — некоторое весовое пространство голоморфных функций в области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$, выделяемое поточечными ограничениями на эти функции посредством некоторой системы мажорант M. Настоящая работа нацелена на построение единой схемы решения двух задач:

(S) какие последовательности точек Λ могут быть подпоследовательностью нулей некоторой функции из H, т. е. *подпоследовательностью нулей для* H?

(M) когда мероморфная в Ω функция может быть представлена отношением двух голоморфных функций из H?

Здесь эта схема строится в терминах классических гармонических мер и функций Грина в отличие от предыдущих наших работ (см. список литературы), где подобная модель формулировалась в менее явных терминах мер и потенциалов Йенсена.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 09-01-00046_а и 08-01-97023-р_поволжье_а, а также программы господдержки ведущих научных школ РФ, проект НШ–3081.2008.1.

1. Обозначения, соглашения и основные понятия. Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел или их геометрические интерпретации.

Для отображения $f\colon A\to B$ и $b\in B$ пишем $f\equiv b$ *на* A', если f тождественно равно b на подмножестве $A'\subset A$; в противном случае $f\not\equiv b$ на A'. Как обычно, для $A'\subset A$ через $f\,\big|_{A'}$ обозначаем сужение f на A'. «Положительность» (соответственно «отрицательность») всегда означает "$\geqslant 0$" (соответственно "$\leqslant 0$").

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — не более чем счетная последовательность точек в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ *без предельных точек в* Ω. Среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. Возможно, что $\Lambda=\varnothing$ — *пустое множество.* С каждой последовательностью Λ ассоциируем целочисленную положительную *считающую меру* n_Λ на Ω по правилу

$$n_\Lambda(S):=\sum_{\lambda_k\in S}1,\quad S\subset\Omega,$$

— число точек λ_k, содержащихся в S. Отходя от традиционного понимания последовательности как функции натурального или целого аргумента, считаем, что последовательность Λ совпадает с последовательностью $\Gamma=\{\gamma_k\}$, или равна ей (пишем $\Lambda=\Gamma$), если $n_\Lambda=n_\Gamma$. Иначе говоря, каждая *последовательность точек* рассматривается как представитель некоторого класса эквивалентности, состоящего из последовательностей в Ω с одинаковыми ассоциированными целочисленными мерами. *Включение* $\Lambda\subset\Gamma$ означает, что $n_\Lambda\leqslant n_\Gamma$.

Носитель $\operatorname{supp}\Lambda$ *для последовательности точек* Λ — это носитель $\operatorname{supp}n_\Lambda$ ассоциированной с ней меры. Запись $\lambda\in\Lambda$ (соответственно $\lambda\notin\Lambda$) означает, что $\lambda\in\operatorname{supp}\Lambda$ (соответственно $\lambda\notin\operatorname{supp}\Lambda$). Для подмножества $B\subset\mathbb{C}$ пишем $\Lambda\subset B$, если $\operatorname{supp}\Lambda\subset B$.

Через $\operatorname{Hol}(\Omega)$ обозначаем класс всех голоморфных функций в области $\Omega\subset\mathbb{C}$. По функции $M\colon\Omega\to[-\infty,+\infty]$ определим класс

$$\operatorname{Hol}(\Omega;M):=\left\{f\in\operatorname{Hol}(\Omega)\colon\ \sup_{z\in\Omega}\frac{|f(z)|}{\exp M(z)}<+\infty\right\}.$$

Пусть $f\in\operatorname{Hol}(\Omega)$, $f\not\equiv 0$ на Ω. Последовательность нулей функции f в Ω, перенумерованную с учетом кратности, обозначаем через Zero_f. Последовательность Λ — **последовательность нулей** для подкласса $H\subset\operatorname{Hol}(\Omega)$, если найдется функция $f\in H$ такая, что $\Lambda=\operatorname{Zero}_f$. Функция $f\in\operatorname{Hol}(\Omega)$ *обращается в нуль на* Λ, если $\Lambda\subset\operatorname{Zero}_f$ (пишем $f(\Lambda)=0$). Последовательность Λ — **<u>под</u>последовательность нулей** для подкласса $H\subset\operatorname{Hol}(\Omega)$, если существует функция $f\not\equiv 0$ на Ω из класса H, обращающаяся в нуль на Λ.

Через m обозначаем *лебегову меру* на $\mathbb{C}$, а иногда, когда это ясно из контекста, и ее сужения на подмножества из $\mathbb{C}$.

Пишем $S \Subset \Omega$ и говорим, что S *предкомпактно* в Ω, если *замыкание* $\overline{S}$ подмножества $S \subset \Omega$ — компакт в Ω.

Для области $D \Subset \mathbb{C}$, через $g_D(\cdot, z)$ обозначаем *продолженную функцию Грина* для D с полюсом в точке $z \in D$ [1; п. 5.7.4], т. е. $g_D(\zeta, z) \equiv 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и $g(\zeta, z)$ — субгармоническая функция от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$, гармоническая по ζ в $\Omega \setminus \{z\}$. Соответственно, $\omega_D(z, \cdot)$ — *гармоническая мера в точке z относительно* $D \Subset \mathbb{C}$ [1; п. 5.7.1].

Как обычно, $C(S)$ — пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на множестве $S \subset \mathbb{C}$. Через $\mathscr{M}(S)$ обозначаем множество всех вещественных борелевских мер (мер Радона) на борелевском множестве S (на $C(S)$).

Интегралы от функций со значениями в $[-\infty, +\infty]$ по положительной мере ν понимаются в широком смысле, т. е. могут принимать значения из $[-\infty, +\infty]$, как в [1], но функция *интегрируема по мере* ν, если интеграл от нее по мере ν конечен.

Пусть $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$. Как обычно, $\operatorname{supp} \mu$ — *носитель* меры μ. Мера $\mu \in \mathscr{M}^+(\Omega)$ *сосредоточена на* борелевском подмножестве $B \subset \Omega$, если $\mu(\Omega \setminus B) = 0$. Для борелевского множества $B \subset \Omega$ *сужение меры μ на B* обозначается $\mu\,\big|_B$.

Через $D(z, t)$ обозначаем открытый круг радиуса $t \in \mathrm{R}$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$. Если $t \leqslant 0$, то $D(z, t) = \varnothing$. По определению $D(t) := D(0, t)$. *Единичный круг* $D(1)$ обозначаем через $\mathbb{D}$.

Для $\nu \in \mathscr{M}(\Omega)$ и $D(t) \subset \Omega$ полагаем $\nu^{\mathrm{rad}}(t) := \nu\big(D(t)\big)$.

Через $SH(\Omega)$ обозначаем конус всех субгармонических функций на Ω. Функция, тождественно равная $-\infty$ на Ω, по определению принадлежит $SH(\Omega)$. Для $u \in SH(\Omega)$ при $u \not\equiv -\infty$ на Ω через[1] $\nu_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u$ обозначаем *меру Рисса* функции u.

Как обычно, $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — множество всех локально интегрируемых по мере Лебега m функций $F \colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$.

Через $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$ обозначаем функцию евклидова расстояния между точками или множествами в $\mathbb{C}$. В частности, $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — евклидово расстояние от точки $z \in \mathbb{C}$ до *границы* $\partial\Omega$ области Ω.

Всюду далее мера $m^{(r)} \in \mathscr{M}^+(\mathbb{C})$ — это сужение меры Лебега m

---

[1] Здесь Δ — оператор Лапласа, действующий в смысле теории распределений, или теории обобщенных функций.

на круг $D(r)$, нормированное условием $m^{(r)}\bigl(D(r)\bigr)=1$, т. е.

$$m^{(r)} := \frac{1}{m^{\mathrm{rad}}(r)}\, m\,\bigl|_{D(r)}\,.$$

В частности, по определению субгармонической функции

$$v(z) \leqslant \bigl(v * m^{(r)}\bigr)(z), \quad v\in SH(\Omega),$$

если $z+D(r)=D(z,r)\Subset\Omega$ (здесь и ниже $*$ обозначает *свертку*).

Допустим, что функция $r\colon\Omega\to(0,+\infty)$ удовлетворяет ограничениям $0<r(z)<\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$, $\forall z\in\Omega$. Тогда для функции $F\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ можем определить ее переменное усреднение

$$F^{(r)}(z) := \int_{D(r(z))} F(z+w)\, dm^{(r(z))}(w), \quad z\in\Omega,$$

которое *при дополнительном условии* $\sigma\in C(\Omega)$ также *непрерывно*.

Далее область в $\mathbb{C}$ *регулярна*, если для нее разрешима классическая задача Дирихле.

Определение 1. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $0\in\Omega$, а $S_0\Subset\Omega$ и также $0\in S_0$. Систему *регулярных* областей $\mathscr{U}_{S_0}(\Omega)\subset\{D\Subset\Omega\colon\ S_0\subset D\}$ называем *регулярной оптимально исчерпывающей в* Ω (с центром S_0), если для любых двух областей Ω_1 и Ω_2 при $S_0\subset\Omega_1\Subset\Omega_2\subset\Omega$ выполнены два условия:

1) *можно подобрать область* $D\in\mathscr{U}_{S_0}(\Omega)$ *такую, что* $\Omega_1\Subset D\Subset\Omega_2$ *и каждая непустая ограниченная компонента связности множества* $\mathbb{C}\setminus D$ *пересекает* $\mathbb{C}\setminus\Omega_2$;

2) *для любой области* $D\in\mathscr{U}_{S_0}(\Omega)$ *найдется область* $\Omega_D\in\mathscr{U}_{S_0}(\Omega)$ *такая, что* $\Omega_1\Subset\Omega_D\Subset\Omega_2$, *и объединение* $\Omega_D\cup D$ *также принадлежит* $\mathscr{U}_{S_0}(\Omega)$;

а кроме того, эта система *условно инвариантна относительно сдвига в* Ω, т. е. из $D\in\mathscr{U}_{S_0}(\Omega)$, $w\in\mathbb{C}$ и $S_0\subset D+w\Subset\Omega$ следует, что $D+w\in\mathscr{U}_{S_0}(\Omega)$.

Если $S_0=\{0\}$, то используем обозначение $\mathscr{U}_0(\Omega):=\mathscr{U}_{\{0\}}(\Omega)$.

Простым примером регулярной оптимально исчерпывающей системы областей может служить *специальная система* $\mathscr{U}^d_{S_0}(\Omega)$ *всевозможных связных объединений* $D\supset S_0$ *конечного числа кругов* $D(z_j,t_j)\Subset\Omega$, $j=1,\dots,m$, *исключая те области* D, *в дополнении* $\mathbb{C}\setminus D$ *которых есть изолированные точки.* С такими же исключениями круги в этом примере можно заменить на предкомпактные в

Ω всевозможные n-угольники или, более общó, односвязные подобласти какого-либо специального типа (см. [2, Пример 1]).

2. Основной результат.

Теорема (основная). *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{C}$ содержит 0, $\mathscr{U}_{K_0}(\Omega)$ — регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром $K_0 \ni 0$ — связным компактом, а фукция $M\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ принадлежит $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и ограничена снизу в некоторой окрестности компакта K_0.*

Пусть u — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_u на Ω, $u(0) \neq -\infty$. Допустим, выполнено какое-либо из следующих трех условий:

1) *$M \in C(\Omega)$ или $M \in SH(\Omega)$ и выполнено неравенство*[2]

$$-\infty < \inf_{D \in \mathscr{U}_{K_0}(\Omega)} \left(-\int_{\Omega} u(z)\, d\omega_D(0,z) + \int_{\Omega} M(z)\, d\omega_D(0,z) \right);$$

2) *$M \in C(\Omega)$ или $M \in SH(\Omega)$ и имеет место неравенство*

$$-\infty < \inf_{D \in \mathscr{U}_{K_0}(\Omega)} \left(-\int_{\Omega\setminus\{0\}} g_D(\zeta,0)\, d\nu_u(\zeta) + \int_{\Omega} M(z)\, d\omega_D(0,z) \right);$$

3) *$M \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_M и справедливо неравенство*

$$-\infty < \inf_{D \in \mathscr{U}_{K_0}(\Omega)} \left(-\int_{\Omega\setminus\{0\}} g_D(\zeta,0)\, d\nu_u(\zeta) + \int_{\Omega\setminus\{0\}} g_D(\zeta,0)\, d\nu_M(\zeta) \right);$$

Тогда для любой функции $r \in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничениям $0 < r(z) < \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$ при всех $z \in \Omega$, найдутся субгармоническая функция $v \not\equiv -\infty$, гармоническая в некоторой окрестности нуля, удовлетворяющая неравенству

$$u(z) + v(z) \leqslant M^{(r)}(z), \quad \forall z \in \Omega, \tag{1}$$

[2]К сожалению, в Основной теоремы из нашей работы [2] допущена досадная опечатка в знаках $\pm$. В ее формулировке неравенства (2.11) из п. (h1) и (2.12) из п. (h2) должны выглядеть в точности как неравенства из пп. 3) и 1) соответственно. Другими словами, в [2] в (2.11) и (2.12) в скобках под операцией inf необходимо заменить знаки перед интегралами на противоположные. Отметим, что с этими исправлениями опечаток доказательства Основной теоремы и ее следствий в [2] остаются верными без каких-либо иных изменений.

и функция $h \in \mathrm{Hol}\,(\Omega)$, $h \not\equiv 0$ *на* Ω, *для которой*

$$u(z) + \log\bigl|h(z)\bigr| \leqslant \inf_{0<t<\mathrm{dist}\,(z,\partial\Omega)} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^{(r)}(z+te^{i\theta})\,d\theta + \log\Bigl(1+\frac{1}{t}\Bigr)\right) + 9\log\bigl(1+|z|\bigr)\,, \quad \forall z \in \Omega. \tag{2}$$

При этом

i) *если* $M \in C(\Omega)$, *то переменное усреднение* $M^{(r)}$ *в обоих неравенствах* (1), (2) *можно заменить на саму функцию* M;

ii) *если* $\Omega \neq \mathbb{C}$, *то для любой точки* $z_0 \notin \Omega$ *слагаемое* $9\log\bigl(1+|z|\bigr)$ *в* (2) *можно заменить на слагаемое* $9\,\bigl|\log|z-z_0|\bigr|$, *а если* $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$, *то это слагаемое можно даже отбросить;*

iii) *если* $\Omega = \mathbb{C}$, *то для любого числа* $\sigma > 0$ *в правой часть* (2) *можно поставить просто* $\sup\bigl\{M(w)\colon |z-w| \leqslant \sigma\bigr\}$.

$\lhd$ Применение классической формулы Пуассона–Йенсена из [1; п. 5.7.4] к субгармонической функции M дает импликацию 3) $\Rightarrow$ 2), а ее применение к $u \in SH(\Omega)$ — импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Далее нам потребуется определения мер Йенсена и их потенциалов, исследование свойств которых можно найти, к примеру, в [3].

Положительная мера $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ с компактным носителем в области Ω называется *мерой Йенсена* для точки $0 \in \Omega$, если

$$v(0) \leqslant \int_\Omega v\,d\mu, \quad \forall v \in SH(\Omega).$$

Через $\mathscr{J}(\Omega)$ обозначаем класс всех мер Йенсена для $0 \in \Omega$, а для $B \subset \Omega$ множество мер $\mu \in \mathscr{J}(\Omega)$, для которых $B \cap \mathrm{supp}\,\mu = \varnothing$, обозначаем $\mathscr{J}^B(\Omega)$.

Отметим, что мера $\mu \in \mathscr{J}(\Omega)$ вероятностная. *Потенциал меры* $\mu \in \mathscr{J}(\Omega)$ определяем как функцию

$$\zeta \mapsto V_\mu(\zeta) := \int \log|z-\zeta|\,d\mu(z) - \log|\zeta| = \int \log\Bigl|1-\frac{z}{\zeta}\Bigr|\,d\mu(z),\ \zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,.$$

Этот потенциал тождественно равен нулю вне некоторого компакта из Ω, содержащего 0, и всюду положителен вне нуля.

В [2; § 4, п. 4.2] доказано, что условие 1) Основной теоремы влечет за собой выполнение свойства

(J) *Существуют постоянная C и область $\Omega' \Subset \Omega$, содержащая центр K_0 системы $\mathscr{U}_{K_0}(\Omega)$, при которых для всех мер Йенсена $\mu \in \mathscr{J}^{\Omega'}(\Omega)$ выполнено неравенство*

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} V_\mu \, d\nu_u \leqslant \int_\Omega M \, d\mu + C,$$

а функция M ограничена в открытой окрестности $\overline{\Omega'}$.

Из условия (J) по [1; Теорема 6] следует, что найдется субгармоническая функция $v \not\equiv -\infty$, с которой выполнено (1). В силу непрерывности функции $M^{(r)}$ функцию v можно "подправить", сохраняя (1): гармонически продолжить в круг $D(\varepsilon) \Subset \Omega$ и вычесть достаточно большую положительную постоянную.

Из [4; Лемма 1.1] следует, что найдется функция $h \in \operatorname{Hol}(\Omega)$, $h \not\equiv 0$ на Ω, для которой при каждом $z \in \Omega$ для любого числа t, $0 < t < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$, выполнено неравенство

$$\log\bigl|h(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z + te^{i\theta})\, d\theta + \log\Bigl(1 + \frac{1}{t}\Bigr) + 9\log\bigl(1 + |z|\bigr)\,.$$

Применяя этот факт к (1), получаем (2).

Если $M \in C(\Omega)$, то в силу локальной равномерной непрерывности M в Ω можно подобрать функцию $r \in C(\Omega)$ с требуемыми в Основной теореме ограничениями так, что $M^{(r)}(z) \leqslant M(z) + 1$ для всех $z \in \Omega$. Тогда, вычитая из v в (1) достаточно большую положительную постоянную или домножая в (2) функцию h на достаточно малое число $a > 0$, получаем дополнение i).

Если $\Omega \neq \mathbb{C}$ и $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, то, домножая функцию h из левой части (2) на голоморфную в Ω функцию $\frac{a}{(z-z_0)^9}$, где $a > 0$ достаточно мало, получаем первую часть утверждения ii). Заключительная его часть получается, если выбрать этот множитель при некотором $\varepsilon > 0$ с условием $D(z_0, \varepsilon) \cap \Omega = \varnothing$.

Наконец, п. iii) следует из [5; Предложение 9.2] (см. также пп. 2а), 2б) доказательства [6; Основная теорема]). $\triangleright$

Замечание 1. Результаты Основной теоремы в ослабленной форме были анонсированы в 2006 г. в [7; Теорема 1.2.1, Дополнение 1.2.2]. Часть Основной теоремы в варианте $\Omega = \mathbb{C}$ и 1)$\Rightarrow$iii) было доказана в 2008 г. в [8; Теорема 1.5] на основе [6; Основная теорема].

Замечание 2. Интеграл $\int_\Omega M(z)\,d\omega_D(0,z)$ в 1) и 2) — это значение в нуле решения классической задачи Дирихле в регулярной области $D \ni 0$ с граничными значениями $M\,\Big|_{\partial D}$.

3. Применения Основной теоремы. Первая теорема в определенной степени решает задачу (S).

Теорема S. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_k\}$, $0\notin\Lambda$, *— последовательность точек в области* $\Omega\subset\mathbb{C}$, *содержащей* 0, $\mathscr{U}_{K_0}(\Omega)$ *— регулярная оптимально исчерпывающая система областей в* Ω *с центром* $K_0\ni 0$ *— связным компактом, а фукция* $M\colon\Omega\to[-\infty,+\infty]$ *принадлежит* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *и ограничена снизу в некоторой окрестности компакта* K_0. *Если выполнено одно из следующих условий*

1) $M\in C(\Omega)$ *или* $M\in SH(\Omega)$ *и имеет место неравенство*

$$-\infty<\inf_{D\in\mathscr{U}_{K_0}(\Omega)}\left(-\sum_k g_D(\lambda_k,0)+\int_\Omega M(z)\,d\omega_D(0,z)\right);$$

2) $M\in SH(\Omega)$ *с мерой Рисса* ν_M *и справедливо неравенство*

$$-\infty<\inf_{D\in\mathscr{U}_{K_0}(\Omega)}\left(-\sum_k g_D(\lambda_k,0)+\int_{\Omega\setminus\{0\}} g_D(\zeta,0)\,d\nu_M(\zeta)\right).$$

Тогда для произвольной функции $r\in C(\Omega)$, *удовлетворяющей ограничениям* $0<r(z)<\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ *при всех* $z\in\Omega$, Λ *— подпоследовательность нулей для класса* $\mathrm{Hol}\,(\Omega,\widehat{M})$, *где*

$$\begin{aligned}\widehat{M}(z):=\inf_{0<t<\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}&\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M^{(r)}(z+te^{i\theta})\,d\theta+\log\Big(1+\frac{1}{t}\Big)\right)\\&+9\log\big(1+|z|\big),\quad\forall z\in\Omega.\end{aligned}\tag{3}$$

При этом справедливы уточнения i)–iii) *из Основной теоремы.*

Замечание 3. Неравенства из 1) и 2) в Теореме S — необходимое условие, для того чтобы последовательность Λ была подпоследовательностью нулей для класса $\mathrm{Hol}\,(\Omega,M)$ (см. [2; Теорема 2]).

Вторая теорема в определенной степени решает задачу (M).

Теорема M. *Пусть* $f=g_0/q_0$, $g_0,q_0\in\mathrm{Hol}\,(\Omega)$, *— мероморфная функция в области* $\Omega\subset\mathbb{C}$, *содержащей* 0, $\mathscr{U}_{K_0}(\Omega)$ *— регулярная* *оптимально исчерпывающая система областей в* Ω *с центром* $K_0 \ni 0$ *— связным компактом, а фукция* $M\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ *принадлежит* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *и ограничена снизу в некоторой окрестности компакта* K_0*. Если для функции*

$$u := \max\{\log|g_0|, \log|q_0|\} \quad \text{или} \quad u = \log\sqrt{|g_0|^2 + |q_0|^2} \tag{4}$$

выполнено условие 1) *из Основной теоремы, то найдутся две функции* $g, q \in \mathrm{Hol}\,(\Omega, \widehat{M})$*, где* $\widehat{M}$ *— функция из (3), с которыми справедливо представление* $f = g/q$*.*

При этом справедливы уточнения i)–iii) *из Основной теоремы.*

Замечание 4. Неравенство из условия 1) Основной теоремы применительно к функции u из (4) — необходимое, когда мероморфная функция $f \not\equiv 0, \infty$ представима в виде $f = g/q$ с функциями $g, q \in \mathrm{Hol}\,(\Omega, M)$.

Доказательства Теорем S и M опускаем, поскольку их вывод из Основной теоремы очень близок к схеме рассуждений из [5; §§ 11, 12] или [2; доказательства Теорем 2, 5]. При этом при доказательстве Теоремы S надо воспользоваться тем, что для субгармонической функции $u := \log|f_\Lambda|$, где f_Λ — голоморфная функция с $\mathrm{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$, распределение масс Рисса ν_u совпадает с n_Λ.

Литература

1. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.—М.: Мир, 1980.
2. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Матем. сб.—2007.—Т. 198.—№ 2.—С. 121–160.
3. *Хабибуллин Б. Н.* Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций // Сиб. матем. журн.—2003.—Т. 4.—№ 4.—С. 905–925.
4. *Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20.—№ 1.—С. 162–204.
5. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Серия матем.—2001.—Т. 65.—№ 5.—С. 167–190.
6. *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Серия матем.—1991.—Т. 55.—№ 5.—С. 1101-1123.
7. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Обзор-монография.—Уфа: РИЦ БашГУ, 2006. Издание второе дополненное.—Уфа: РИЦ БашГУ, 2008.—188 с.
8. *Roy S.* Extreme Jensen measure // Ark. Mat.—2008.—V. 46.—P. 153–182.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Башкирский государственный университет
Россия, 450074, РБ, Уфа, ул. Фрунзе, 32
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Khabibullin B. N.
Zeros of holomorphic functions
with restrictions on growth in the domain

Let $\Lambda = \{\lambda_k\}$ be a sequence of points in a domain Ω of the complex plane. In terms of harmonic measures and Green functions conditions are obtained, under which Λ is subsequence of zeros for some nonzero holomorphic function with restrictions on growth in Ω. In similar terms the problem on representation meromorphic in Ω functions in the form of the ratio of two holomorphic functions from a weighted class is considered.