

УДК 517.538.2

Б. Н. Хабибуллин\*

## Полнота систем экспонент в пространствах функций на луче и характеристика Коренблюма–Сейпа

Пусть  $\{\lambda_k\}$  — последовательность точек в правой полуплоскости комплексной плоскости. В терминах характеристики Коренблюма–Сейпа, возникшей при описании распределения нулей функций из равномерных пространств Бергмана в единичном круге, даются достаточные условия полноты экспоненциальной системы  $\{e^{-\lambda_k x}\}$  в пространстве функций на положительной полуоси, интегрируемых в  $p$ -ой степени со степенным весом.

**Библиография:** 9 названий.

**Ключевые слова:** положительная полуось, весовое пространство интегрируемых функций, экспоненциальная система, полнота, единичный круг, пространство Бергмана.

В статье приводятся некоторые достаточные условия полноты системы экспонент в весовых пространствах функций, интегрируемых со степенным весом *на положительной полуоси*  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  *вещественной оси*  $\mathbb{R}$  *комплексной плоскости*  $\mathbb{C}$ . В основном мы используем сведения и придерживаемся терминологии, определений и соглашений из книг А. М. Седлецкого [1]–[4], его обзора в соавторстве [5], совместной монографии К. Жу, Б. Коренблюма, Х. Хеденмальма [6], а также нашего обзора по полноте экспоненциальных систем [7].

Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $1 \leq p < +\infty$ . Весовое нормированное пространство  $L_\alpha^p := L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$  состоит из всех измеримых по мере Лебега с плотностью  $dx$  на  $\mathbb{R}_+$  функций  $f$  с почти всюду определенными значениями<sup>1</sup> в  $\mathbb{C}$  и

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00067а, а также программы господдержки ведущих научных школ РФ, проект НШ–3081.2008.1.

<sup>1</sup>Как обычно, почти всюду совпадающие функции отождествляются.

с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left( \int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p x^\alpha dx \right)^{1/p}.$$

Легко показать, да и известно [3, п. 9.4.1], что при  $p > 1$  (топологически) сопряженное к  $L_\alpha^p$  пространство (топологически) изоморфно пространству  $L_\beta^q$  с

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{т.е. } q := \frac{p}{p-1}, \quad \text{и } \beta := -\frac{\alpha q}{p} = \frac{\alpha}{1-p} \quad (1)$$

в том смысле, что действие (линейного непрерывного) функционала, отождествленного с функцией  $g \in L_\beta^q$ , на  $f \in L_\alpha^p$  задается интегралом  $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)g(x) dx$ . Его конечность и непрерывность относительно  $f \in L_\alpha^p$  обеспечивается неравенством Гельдера.

Нам потребуется и пространство  $L_\beta^\infty := L_\beta^\infty(\mathbb{R}_+)$  с  $\beta \in \mathbb{R}$ , состоящее из измеримых на  $\mathbb{R}_+$  функций  $g$  с конечной нормой

$$\|g\|_{\infty,\beta} := \sup \text{ess} \{g(t)t^\beta : t \in \mathbb{R}_+\},$$

где операция  $\sup \text{ess}$  — *существенная верхняя грань* относительно меры Лебега на  $\mathbb{R}$ . Так, сопряженное к  $L_\alpha^1$  отождествляется с пространством  $L_\beta^\infty$  с  $\beta = -\alpha$  и таким же действием функционала с функцией-представителем  $g \in L_\beta^\infty$  на  $f \in L_\alpha^1$  в виде интеграла, как и выше. Конечность и непрерывность здесь гарантируется уже элементарными оценками сверху модуля интеграла с “вынесением” за его знак величины  $\|g\|_{\infty,\beta}$ .

Пусть  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  — множество всех натуральных чисел,  $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , — пустая, конечная или счетная последовательность точек (чисел)  $\lambda_k$  на (из)  $\mathbb{C}$ , порождающая *экспоненциальную систему*, или *систему (кратных) экспонент*

$$\text{Ехр}_\Lambda := \{z^{n-1} e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, 1 \leq n \leq \Lambda(\lambda), n \in \mathbb{N}\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где  $\Lambda(\lambda)$  — число вхождений точки  $\lambda \in \mathbb{C}$  в последовательность  $\Lambda$ .

Очевидно, что для каждого  $p \in [1, +\infty)$  включение  $\text{Ехр}_\Lambda \subset L_\alpha^p$  имеет место, если и только если для всех  $\lambda_k \in \Lambda$  справедливо неравенство  $\text{Re } \lambda_k < 0$ . Система  $\text{Ехр}_\Lambda$  *полна* в  $L_\alpha^p$ , когда замыкание в  $L_\alpha^p$  линейной оболочки системы  $\text{Ехр}_\Lambda$  совпадает с  $L_\alpha^p$ .

Приведем ряд известных достаточных условий полноты экспоненциальной системы  $\text{Ехр}_{-\Lambda}$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{C}_+$ ,  $-\Lambda := \{-\lambda_k\}$ , в пространствах вида  $L_\alpha^p$ . Далее  $D(z, t)$  — *открытый круг радиуса*  $t > 0$  с *центром* в точке  $z \in \mathbb{C}$ .

1. Полнота системы  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  в  $L_0^2$  эквивалентна условию (теорема Мюнц-Цаса)

$$\sum_k \frac{\text{Re } \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = +\infty. \quad (2)$$

2. При  $1 < p < +\infty$  и  $-1 < \alpha \leq \min\{0, p - 2\}$  условие (2) достаточно для полноты системы  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  в  $L_\alpha^p$  (А. М. Седлецкий [1]–[3, Теорема 9.6.3], [4]). Это же условие достаточно для полноты системы  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  в  $L_\alpha^p$  при любых  $p \in [1, +\infty)$  и  $\alpha \in (-1, +\infty)$ , если для  $\Lambda$  выполнено дополнительное условие (В. И. Ладыгин [3, Теорема 9.4.6])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\inf_k |\lambda_k - iy|}{1 + y^2} dy < +\infty. \quad (3)$$

3. Пусть  $1 \leq p < +\infty$  и  $-1 < \alpha < +\infty$ , а  $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  — убывающая функция и  $\int^{+\infty} \varphi(t) dt < +\infty$ . Если

$$\sum_k \frac{\text{Re } \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} \varphi\left(-\log \frac{\text{Re } \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2}\right) = +\infty,$$

то  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  полна в  $L_\alpha^p$  (А. М. Седлецкий [1, 8.3, Теорема 1], [3, 9.4]).

4. Пусть  $1 < p \leq 2$  и  $p - 2 < \alpha < +\infty$ , а  $\mathcal{N}_\Lambda(x)$  — число точек последовательности  $\Lambda$  в круге  $D(x, \sqrt{x^2 - 1})$ ,  $x > 1$ . Если

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{N}_\Lambda(x)}{x \log x} > \frac{\alpha - (p - 2)}{p},$$

то система  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  полна в  $L_\alpha^p$  (А. М. Седлецкий [1, 8.3, Теорема 8], [3, 9.5, Теорема 9.5.4]).

5. Пусть  $1 < p \leq 2$  и  $p - 2 < \alpha < +\infty$ . Если при некотором  $h > 1$

$$\limsup_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\log x} \sum_{x < \text{Re } \lambda_k < hx} \frac{\text{Re}(\lambda_k - x)}{1 + |\lambda_k - x|^2} > \frac{\alpha + 2 - p}{2p}$$

то система  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  полна в  $L_\alpha^p$  (А. М. Седлецкий [8, Теорема 3]).

По-видимому, А. М. Седлецкий был первым, кто привлек *пространства Бергмана*  $A^{-\gamma}$  в круге [6] для доказательства теорем о полноте экспоненциальных систем в  $L^p_\alpha$  из пп. 3–5. Все эти результаты А. М. Седлецкого в том или ином смысле точны [1]–[5], [8]. В настоящей статье также используется описание нулей голоморфных функций из *равномерных* пространства Бергмана  $\mathcal{A}^{-\gamma}$ , для которых в этом направлении известны весьма точные и глубокие результаты [6, гл. 4].

Через  $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  обозначаем *правую полуплоскость* в  $\mathbb{C}$ . Для формулировки основного результата определим одну характеристику конечной последовательности точек  $S$ , лежащей на расширенной мнимой оси  $i[-\infty, +\infty]$ . Пусть  $\{I_n\}$  — система дополнительных к этой последовательности интервалов на  $i[-\infty, +\infty]$ . Величину  $|I_n|$  определим<sup>2</sup> как раствор угла, под которым виден интервал  $I_n$  из точки  $1 \in \mathbb{C}$ , деленный на  $\pi$ . Через нее определяется *характеристика Берлинга–Карлесона* последовательности  $S$  (относительно правой полуплоскости)

$$\widehat{\chi}(S) := \sum_n |I_n| \log(e/|I_n|), \quad (4)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  — последовательность точек в  $\mathbb{C}_+$ . С каждой точкой  $iy$ ,  $y \in [-\infty, +\infty]$ , свяжем дугу  $\mathfrak{r}_{iy} \in \mathbb{C}_+$  окружности с центром на мнимой оси, соединяющую точки  $1$  и  $iy$ . Очевидно, при  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  центр этой окружности — пересечение серединного перпендикуляра к отрезку  $[1, iy]$  с мнимой осью  $i\mathbb{R}$ . В крайних же ситуациях  $\mathfrak{r}_{i \cdot 0} = (0, 1]$ ,  $\mathfrak{r}_{i \cdot (\pm\infty)} = [1, +\infty)$ . Затем положим  $\mathfrak{r}_S = \cup \{\mathfrak{r}_{iy} : iy \in S\}$  и

$$\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \left( 1 - \left| \frac{1 - \lambda_k}{1 + \lambda_k} \right|^2 \right) = 2 \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{|1 + \lambda_k|^2}. \quad (5)$$

— *характеристика Коренблюма–Сейпа* последовательности  $\Lambda$  относительно подмножества  $S \subset i[-\infty, +\infty]$  (для правой полуплоскости).

Будет доказана

**Теорема.** Пусть  $1 \leq p < +\infty$  и  $-1 < \alpha < +\infty$ . Если

$$\sup_S \left( \Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) - \frac{1 + \alpha}{p} \widehat{\chi}(S) - 2 \frac{1 + \alpha}{p} \log \widehat{\chi}(S) \right) = +\infty, \quad (6)$$

<sup>2</sup>Это гармоническая мера интервала  $I_n$  для  $\mathbb{C}_+$  в точке  $1$ .

где  $\sup$  берется по всем конечным подмножествам  $S$  расширенной мнимой оси, то система  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  полна в  $L^p_\alpha$ .

Случай  $\alpha = 0$  был ранее схематично рассмотрен в нашем обзоре [7, Пример 2.1.1].

**Следствие.** Пусть  $1 \leq p < +\infty$  и  $-1 < \alpha < +\infty$ . Если

$$\limsup_{\widehat{z}(S) \rightarrow +\infty} \frac{1}{\widehat{z}(S)} \sum_{\lambda_k \in \tau_S} \frac{\text{Re } \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} > \frac{1 + \alpha}{2p}, \quad (7)$$

то система  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  полна в  $L^p_\alpha$ .

*Доказательство Теоремы.* Через  $\text{const.}$  обозначаем постоянные из  $\mathbb{R}_+$ . Будем исходить из известного факта [3, Лемма 9.4.1] о том, что неполнота системы  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  в  $L^p(0, +\infty)$  влечет за собой существование голоморфной в правой полуплоскости ненулевой функции  $F$ , обращающейся в нуль в каждой точке  $\lambda \in \mathbb{C}_+$  с кратностью не ниже  $\Lambda(\lambda)$ , вида

$$G(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} g(t) dt, \quad \text{Re } z > 0, \quad g \in L^q_\beta, \quad (8)$$

где (см. (1) и ниже)

$$q := \begin{cases} \frac{p-1}{p} & \text{при } p > 1, \\ \infty & \text{при } p = 1, \end{cases} \quad \beta := \begin{cases} \frac{\alpha}{1-p} & \text{при } p > 1, \\ -\alpha & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

При  $p > 1$  из представления (8) и неравенства Гельдера для всех  $z \in \mathbb{C}_+$  получаем (см. [3, Доказательство теоремы 9.4.1]) неравенство

$$\begin{aligned} |G(z)| &\leq \|g\|_{q,\beta} \left( \int_0^\infty e^{-pt \text{Re } z} t^\alpha dt \right)^{1/p} \\ &= \frac{\|g\|_{q,\beta}}{(\text{Re } z)^{\frac{1+\alpha}{p}}} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha dx = \frac{\text{const.}}{(\text{Re } z)^{\frac{1+\alpha}{p}}}. \end{aligned} \quad (9)$$

При  $p = 1$  такое же неравенство с  $q = \infty$  следует из элементарной оценки интеграла с “вынесением”  $\|g\|_{\infty,\beta}$  из под модуля интеграла.

Замена  $F(z) := G\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , определяет голоморфную в единичном круге  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  ненулевую функцию  $F$ , которая обращается

в нуль на последовательности точек  $A = \{a_k\} \subset \mathbb{D}$  с кратностью не ниже  $A(a)$  в каждой точке  $a \in \mathbb{D}$ , где  $a_k := \frac{1-\lambda_k}{1+\lambda_k}$ , а (9) дает

$$|F(z)| \leq \frac{\text{const.}}{\left(\operatorname{Re} \frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{1+\alpha}{p}}} = \frac{\text{const.} |1+z|^{2\frac{1+\alpha}{p}}}{(1-|z|^2)^{\frac{1+\alpha}{p}}} \leq \text{const.} (1-|z|^2)^{-\frac{1+\alpha}{p}}.$$

Иначе говоря,  $\sup_{z \in \mathbb{D}} |F(z)|(1-|z|)^{(1+\alpha)/p} < +\infty$ . Это означает, что функция  $F$  принадлежит классическому *равномерному пространству Бергмана*

$$\mathcal{A}^{-\gamma} := \sup \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{-\gamma} := \sup_{z \in \mathbb{D}} (1-|z|)^\gamma |f(z)| < +\infty \right\}.$$

при  $\gamma = \frac{1+\alpha}{p}$  (см. монографию Х. Хеденмальма, Б. Коренблюма и К. Жю [6, 4.3]), где  $\operatorname{Hol}(D)$  — пространство голоморфных в области  $D \subset \mathbb{C}$  функций. Известны тонкие необходимые условия для (под)последовательностей нулей функций из таких пространств, полученные К. Сейпом [9, Теорема 1], которые мы используем в модификации [6, Теорема 4.24]. Для конечной последовательности  $S$  точек на *единичной окружности*  $\partial\mathbb{D}$  введем обозначение (*для*  $\mathbb{D}$ )

$$\mathfrak{r}_S := \{rz \in \mathbb{D} : 0 \leq r < 1, z \in S\}, \quad (10)$$

которое выше использовалось для правой полуплоскости (см. абзац перед (4)). Здесь уже через  $|I_n|$  обозначим длины дополнительных к  $S$  дуг на  $\partial\mathbb{D}$ , деленные на  $2\pi$ , а затем по правилу (4) определим характеристику Берлинга–Карлесона последовательности  $S$  (относительно  $\mathbb{D}$ ).

Пусть  $A = \{a_k\}$  — последовательность точек в  $\mathbb{D}$ . Характеристика Коренблюма–Сейпа последовательности  $A$  относительно конечной последовательности  $S \in \partial\mathbb{D}$  (для единичного круга) определяется как

$$\Sigma(A, \mathfrak{r}_S) := \frac{1}{2} \sum_{a_k \in \mathfrak{r}_S} (1 - |a_k|^2).$$

Для любой подпоследовательности нулей  $A = \{a_k\}$  ненулевой функции  $F \in \mathcal{A}^{-\gamma}$  справедливо неравенство [9], [6, Теорема 4.24]

$$\Sigma(A, \mathfrak{r}_S) \leq \frac{1}{p} \widehat{\varkappa}(S) + \frac{2}{p} \log \widehat{\varkappa}(S) + \text{const.}, \quad (11)$$

где  $\text{const.}$  не зависит от выбора конечной последовательности  $S \subset \partial\mathbb{D}$ . После “пересадки” этого результата в правую полуплоскость посредством конформного дробно-линейного отображения  $z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$ ,  $z \in \mathbb{D}$ , левая часть (11) преобразуется в характеристику Коренблюма–Сейпа последовательности  $\Lambda$  для правой полуплоскости относительно последовательности, являющейся образом  $S \subset \partial\mathbb{D}$  при нашем дробно-линейном отображении и по-прежнему обозначаемой той же буквой  $S \subset i[-\infty, +\infty]$ , т. е. совпадает с (5). При этом радиальные интервалы из (10) переходят в дуги окружностей  $\tau_{iy} \in \mathbb{C}_+$ , проходящих через точки 1 (образ нуля) и  $iy \in S \subset i[-\infty, +\infty]$  ортогонально мнимой оси в силу конформности дробно-линейного отображения и “хороших” границ круга и полуплоскости. Очевидно, центры этих окружностей лежат на мнимой оси. Таким образом, характеристика Берлинга–Карлесона конечной последовательности  $S \subset \partial\mathbb{D}$  относительно  $\mathbb{D}$  преобразуется в характеристику Берлинга–Карлесона ее образа на  $i[-\infty, +\infty]$  из (4) относительно правой полуплоскости. Отсюда при условии неполноты системы  $\text{Exp}_{-\Lambda}$  в пространстве  $L^p_\alpha$  из (11) получаем

$$\Sigma(\Lambda, \tau_S) \leq \gamma \widehat{\kappa}(S) + 2\gamma \log \widehat{\kappa}(S) + \text{const.},$$

где  $\text{const.}$  не зависит от конечного подмножества  $S \subset i[-\infty, +\infty]$ . Это противоположное к (6) неравенство и доказывает Теорему. •

*Замечание 1.* В отличие от условия расходимости ряда (2) условие полноты (6) уже тесно связано со значениями показателей  $p$  и  $\alpha$ .

*Замечание 2.* Теорема содержательна лишь в двух случаях:

- 1) при  $p = 1$  для любого  $\alpha > -1$ ;
- 2) при  $1 < p < +\infty$ , но  $\alpha > \min\{0, p - 2\}$ .

Действительно, выполнение условия (6) обеспечивает по определению (5) расходимость ряда

$$\sum_k \frac{\text{Re } \lambda_k}{|1 + \lambda_k|^2},$$

вследствие чего неравенство

$$\frac{\text{Re } \lambda}{|1 + \lambda|^2} = \frac{\text{Re } \lambda}{1 + 2\text{Re } \lambda + |\lambda|^2} \leq \frac{\text{Re } \lambda}{1 + |\lambda|^2}, \quad \text{Re } \lambda \geq 0,$$

влечет за собой выполнение условия расходимости ряда (2). А тогда уже “работает” утверждение 2 после (2). Из того же утверждения при выполнении условия Ладыгина (3) наша Теорема “проигрывает” условию (2) при всех  $p \in [1, +\infty)$  и  $\alpha \in (-1, +\infty)$ .

*Замечание 3.* Возможны и другие версии характеристик Берлинга–Карлесона и Коренблюма–Сейпа, а как следствие, и иные формы Теоремы (см. [6, Теорема 4.25], [9, Теорема 1]).

*Доказательство Следствия.* Из условия полноты (6) Теремы и определения (5) характеристики Коренблюма–Сейпа следует, что условие

$$\limsup_{\widehat{\mathfrak{z}}(S) \rightarrow +\infty} \frac{1}{\widehat{\mathfrak{z}}(S)} \sum_{\lambda_k \in \tau_S} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{|1 + \lambda_k|^2} > \frac{1 + \alpha}{2p} \quad (12)$$

достаточно для полноты экспоненциальной системы  $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$  в  $L^p_\alpha$  в ограничениях Теоремы или Следствия. Случай существования предельной точки в  $\mathbb{C}_+$  для последовательности  $\Lambda$  тривиален (система полна) и вписывается в условие (6), поскольку левая часть этого условия в такой ситуации равна  $+\infty$ . Поэтому далее предполагаем, что у последовательности  $\Lambda$  нет предельных точек в  $\mathbb{C}_+$ . Из условия полноты (12) следует, что для доказательства Следствия достаточно установить следующий факт: *при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  неравенство*

$$\frac{1}{|1 + \lambda_k|^2} \geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)(1 + |\lambda_k|^2)}$$

*выполнено для всех номеров  $k$ , исключая, быть может, конечное число их.* Другими словами, достаточно установить неравенство

$$(1 + \varepsilon)(1 + |\lambda|^2) \geq |1 + \lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus K_\varepsilon, \quad (13)$$

где  $K_\varepsilon$  — некоторый компакт в  $\mathbb{C}_+$ . В полярной форме это неравенство приобретает вид

$$\varepsilon(1 + r^2) \geq 2r \cos \varphi, \quad \lambda = rei\varphi, \quad r = |\lambda|, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

При  $r < \varepsilon/2$  и  $r > 2/\varepsilon$  справедливы соответственно неравенства

$$\varepsilon(1 + r^2) \geq \varepsilon \geq 2r \geq 2r \cos \varphi \quad \text{при } r \leq \frac{\varepsilon}{2},$$



и

$$\varepsilon(1+r^2) \geq \varepsilon r^2 \geq \varepsilon \frac{2}{\varepsilon} r = 2r \geq 2r \cos \varphi \quad \text{при } r \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Кроме того, при  $\cos \varphi < \varepsilon$  имеем

$$\varepsilon(1+r^2) \geq \varepsilon \cdot 2r \geq 2r \cos \varphi.$$

Следовательно, в качестве компакта  $K_\varepsilon$  в (13) можно выбрать множество

$$K_\varepsilon := \{z = re^{i\varphi} : \frac{\varepsilon}{2} \leq r \leq \frac{2}{\varepsilon}, \quad \cos \varphi \geq \varepsilon\}$$

— компакт в  $\mathbb{C}_+$ . Следствие доказано. •

*Замечание 4.* Гораздо более сложный вопрос о необходимых условиях полноты системы  $\text{Exp}_{-\Delta}$  в  $L^p_\alpha$  в терминах характеристик Берлинга–Карлесона и Коренблюма–Сейпа предполагается рассмотреть позже.

## Список литературы

- [1] *Sedletsii A. M.* Fourier transforms and approximation. An Internat. Ser. Monogr. Math. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher, 2000. 261 pp.
- [2] *Седлецкий А. М.* Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации. I. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: МАИ. 2003. 152 стр.
- [3] *Седлецкий А. М.* Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации. II. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 6. М.: МАИ. 2003. 162 стр.
- [4] *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит. 2005. 503 стр.
- [5] *Моисеев Е. И., Прудников А. П., Седлецкий А. М.* Базисность и полнота некоторых систем элементарных функций. М.: Вычислительный центр РАН. 2004. 146 стр.
- [6] *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics. V. 199. N. Y.: Springer-Verlag. 2000. x+289 pp.

- [7] *Хабидуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Уфа: РИЦ БашГУ. 2006; издание второе, дополненное, 2008. xvi+172 стр.
- [8] *Седлецкий А. М.* Аппроксимация типа Мюнца–Саса в весовых пространствах  $L^p$  и нули функций классов Бергмана в полуплоскости // Известия вузов. Математика. 2008. № 5. Р. 92–100.
- [9] *Seip K.* On Korenblum’s density condition for the zero sequences of  $A^{-\alpha}$  // J. d’Analyse Math. 1995. V. 67. P. 307–322.

Башкирский государственный университет  
450074, Уфа, ул. Фрунзе, 32

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН  
450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112

E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru

Web-site: <http://math.bsunet.ru/khb>