

УДК 517.547 + 517.538 + 517.574

Е. Г. Кудашева, Б. Н. Хабибуллин*

Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций

Пусть \mathbb{D} — единичный круг комплексной плоскости \mathbb{C} , а H — некоторый класс голоморфных в \mathbb{D} функций, выделяемых ограничением на их рост вблизи границы круга посредством весовых функций умеренного роста. Получен ряд результатов об описании последовательностей нулей для голоморфных функций из таких классов H . Весовые функции, определяющие класс H не обязательно радиальные. В то же время и для радиальных ограничений результаты являются новыми. $\|x\|$
Рассмотрены условия на мероморфные в \mathbb{D} функции, при которых они могут быть представлены в виде отношения двух функций из H без общих нулей.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: единичный круг, голоморфная функция, последовательность нулей, весовое пространство, представление мероморфной функции, субгармоническая функция, функция Грина

§ 1. Введение. Описание общей схемы

Как обычно, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} и \mathbb{C} — множества соответственно¹ всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел или их геометрические интерпретации. Следуя Л. Шварцу [1], положительность числа, функции, меры и т. д. понимаем всюду как ≥ 0 , а > 0 — это строгая положительность. Аналогичное соглашение принимается для отрицательности и строгой отрицательности. Функция $f(t)$, определенная на интервале (ограниченном или неограниченном) вещественной оси, называется возрастающей (соответственно строго возрастающей), если при всех $t_1 < t_2$ из области определения выполнено неравенство $f(t_1) \leq f(t_2)$ (соответственно строгое неравенство $f(t_1) < f(t_2)$). Подобным же образом различаем убывание и строгое убывание.

Для $a \in \mathbb{R}$ через $[a]$ обозначаем целую часть числа a , $a^+ := \max\{a, 0\}$ — его положительная часть, $\log^+ a := (\log a)^+$ при $a > 0$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 09-01-00046_a и 08-01-97023-р_поволжье_a, а также программы господдержки ведущих научных школ РФ, проект НШ-3081.2008.1.

¹Далее сокращение «соответственно» используется для предлога «соответственно».

Для подмножеств $A, B \subset \mathbb{C}$ пишем $A \Subset B$, если замыкание \bar{A} множества A — компакт в B в топологии, индуцированной с \mathbb{C} ; ∂A — граница множества A в \mathbb{C} .

Как всегда, $C(S)$ — пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на множестве $S \subset \mathbb{C}$. Через $\mathcal{M}(S)$ обозначаем множество всех вещественных борелевских мер (мер Радона) на борелевском множестве S (на $C(S)$); $\mathcal{M}^+(S)$ — подконус в $\mathcal{M}(S)$, состоящий из положительных борелевских мер; $\mathcal{M}_{\text{ac}}^+(S)$ — подкласс $\mathcal{M}^+(S)$, состоящий из мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега m . Сужение меры $\mu \in \mathcal{M}(S)$ на его борелевское подмножество B обозначаем как $\mu|_B$. Интегралы от функций со значениями в $[-\infty, +\infty]$ по положительной мере ν понимаются в широком смысле, т. е. могут принимать значения из $[-\infty, +\infty]$, как в [2], но функция интегрируема по мере ν , если интеграл от нее по мере ν конечен. Класс всех локально интегрируемых по m функций на области $\Omega \subset \mathbb{C}$ обозначаем через $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

По поводу голоморфных, мероморфных и субгармонических функций в статье используются близкие к стандартным обозначения, терминология, а также широко известные факты из монографий [2]–[7]. Последовательности точек в области или на плоскости, а также отношения и обозначения, связанные с ними, понимаются так же, как в [8].

Предварительно сформулируем одни из основных результатов статьи [8] о последовательностях нулей для весовых пространствах голоморфных функций и о представлении мероморфных функций в существенно упрощенной, но все еще достаточно общей форме. На них в основном и будут опираться исследования настоящей статьи.

Для $z \in \mathbb{C}$ и $r \geq 0$ через $D(z, r) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$ *открытый круг* радиуса r с центром в точке $z \in \mathbb{C}$. При этом $D(r) := D(0, r)$, $\mathbb{D} := D(1)$. Для произвольной меры ν на \mathbb{C} при $t > 0$ полагаем

$$\nu(z, t) := \nu(D(z, t)), \quad \nu^{\text{rad}}(t) := \nu(0, t) \quad (1.1)$$

при условии определенности правых частей. Но *в связи с принятыми в [8] соглашениями* нам удобно считать, что $\nu(z, 0) := \nu(\{z\})$.

Пусть $\Omega \ni 0$ — односвязная в \mathbb{C} область или такая, что $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset$, а M — субгармоническая функция на Ω с мерой Рисса $\nu_M = \frac{1}{2\pi} \Delta M$, $\nu := \nu_M \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, где оператор Лапласа Δ действует в смысле теории обобщенных функций, или распределений. Тогда для M имеет место глобальное представление Рисса [8, Предложение 2.1]

$$M(z) \equiv \int_{\Omega} k(z, \zeta) d\nu(\zeta) + H(z), \quad z \in \Omega, \quad (1.2)$$

где H — гармоническая в Ω функция, если k — некоторое *субгармоническое ядро*, *подходящее для меры ν* , или функции M . Здесь мы не будем приводить определений, связанных с общим понятием субгармонического ядра (см. [8, Определения 2–4]), а отметим лишь простейшие ситуации для области Ω и конкретизируем случай $\Omega = \mathbb{D}$ (см. [8, 2.1, Примеры 0)–2]).

Функция $(\zeta, z) \mapsto \log |\zeta - z|$ — подходящее субгармоническое ядро на $\Omega \times \Omega$ для всякой меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ с компактным носителем в Ω , а в случае $\Omega \Subset \mathbb{C}$ и для произвольной конечной меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ на Ω , т. е. удовлетворяющей ограничению $\nu(\Omega) < +\infty$. Если для области Ω существует функция Грина g_Ω , или, что эквивалентно, граница $\partial\Omega$ — неполярное множество), то функции

$$(\zeta, z) \mapsto -g_\Omega(\zeta, z) \quad \text{и} \quad (\zeta, z) \mapsto -g_\Omega(\zeta, z) + \log |\zeta| \quad (1.3)$$

— субгармонические ядра соответственно на $\Omega \times \Omega$ и на $(\Omega \setminus \{0\}) \times \Omega$. Эти ядра подходящие для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ при условии (см. [7, теорема 4.5.4])

$$\int_{\Omega} g_\Omega(\zeta, 0) d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Пусть $\Omega = \mathbb{D}$. Будут использоваться один из вариантов множителя Бляшке и псевдогиперболическое расстояние для \mathbb{D} :

$$\begin{aligned} B_\zeta(z) &:= \frac{|\zeta|}{\zeta} \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z}, \quad \zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{D}, \quad \text{но } |B_0(z)| := |z|, \\ \bar{B}_\zeta(z) &:= \frac{\bar{\zeta}(\zeta - z)}{1 - \bar{\zeta}z} = |\zeta| B_\zeta(z), \quad \zeta \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{D}, \\ \rho(\zeta, z) &:= \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \right| = |B_\zeta(z)| = \frac{1}{|\zeta|} |\bar{B}_\zeta(z)|, \quad \zeta \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Субгармоническое ядро Бляшке на $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ — функция

$$(\zeta, z) \mapsto b_1(\zeta, z) := \log |B_\zeta(z)| = \log \rho(\zeta, z) = -g_{\mathbb{D}}(\zeta, z), \quad (\zeta, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}.$$

Оно подходящее для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{1^-} (1-t) d\nu^{\text{rad}}(t) < +\infty. \quad (1.4)$$

Аналогично,

$$(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times \mathbb{D} \ni (\zeta, z) \mapsto \bar{b}_1(\zeta, z) := \log |\bar{B}_\zeta(z)| = -g_{\mathbb{D}}(z, \zeta) + \log |\zeta|$$

— субгармоническое ядро на $(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times \mathbb{D}$, подходящее для $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, если одновременно с (1.4) при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено условие

$$\int_0^\varepsilon \frac{\nu^{\text{rad}}(t)}{t} dt < +\infty, \quad (1.5)$$

обеспечивающее равенство $\nu(\{0\}) = 0$.

Для $p \geq 1$ ядро Бомаша (см. [9], [10]) с несущим множеством $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ — функция

$$(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times \mathbb{D} \ni (\zeta, z) \mapsto \bar{b}_p(\zeta, z) := \log |1 - (1 - \bar{B}_\zeta(z))^p| = \log \left| 1 - \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)^p \right|,$$

которую можно корректно определить при любых вещественных $1 \leq p$, выбирая соответствующую аналитическую ветвь для функции возведения в степень p . Но в данной работе используются только случаи $p = 1, 2$. Убедимся, что выражение под логарифмом модуля в правой части обращается в нуль только в точке $z = \zeta$ с кратностью 1 при $p = 1, 2, \dots, 6$, но в то же время может иметь и другие нули в случае $p > 7$ (так же, как и для ядра Беллера [11, леммы 1,2]). В рамках наших определений из [8, определения 2–3] это будет означать, что ядро $\bar{b}_p(\zeta, z)$ при $p = 1, 2, \dots, 6$ *субгармоническое*.

За счет поворота круга достаточно рассмотреть случай строго положительного $\zeta = t > 0$, учитывая ограничение $t < 1$. Для $|z| < 1$ решаем (относительно z) уравнение

$$\left(\frac{1-t^2}{1-tz}\right)^p = 1, \text{ откуда } z = \frac{t^2 + e^{\frac{2\pi ki}{p}} - 1}{te^{\frac{2\pi ki}{p}}}, \quad k = 0, 1, \dots, p-1. \quad (1.6)$$

При этом для решения $z \in \mathbb{D}$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{aligned} 1 > |z|^2 &= \frac{(t^2 + \cos \frac{2\pi k}{n} - 1)^2 + \sin^2 \frac{2\pi k}{n}}{t^2} \\ &= \frac{t^4 + (2 \cos \frac{2\pi k}{p} - 2)t^2 + (2 - 2 \cos \frac{2\pi k}{p})}{t^2} \end{aligned}$$

или эквивалентного ему

$$t^4 + \left(2 \cos \frac{2\pi k}{p} - 3\right)t^2 + \left(2 - 2 \cos \frac{2\pi k}{p}\right) < 0. \quad (1.7)$$

Точная нижняя грань чисел t^2 , при которых выполнено это условие, равна

$$1 + \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{2\pi k}{p}\right) - \left|\cos \frac{2\pi k}{p} - \frac{1}{2}\right| > 0$$

и должна быть меньше 1. При $\cos \frac{2\pi k}{p} - \frac{1}{2} < 0$ эта грань равна 1 и требуемых решений $z \in \mathbb{D}$ при k , удовлетворяющих последнему неравенству, нет. При $\cos \frac{2\pi k}{p} - \frac{1}{2} \geq 0$ эта точная грань равна

$$2 - 2 \cos \frac{2\pi k}{p} = 4 \sin^2 \frac{\pi k}{p} < 1 \iff \left|\sin \frac{\pi k}{p}\right| < \sin \frac{\pi}{6}, \quad (1.8)$$

откуда при $1 \leq p \leq 6$ следует $k = 0$ и, согласно (1.6), $z = t$ — единственное решение уравнения (1.6), а при $p \geq 7$ подходят еще, как минимум, и решения из (1.6) со всеми $|k| \leq p/6$. Использование производной показывает, что все корни уравнения (1.6) относительно z кратности 1.

Ядра Бомаша \bar{b}_p — подходящие ядра для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии

$$\int_0^{1/2} \frac{\nu^{\text{rad}}(t)}{t} dt + \int_0^{1^-} (1-t)^p d\nu^{\text{rad}}(t) < +\infty. \quad (1.9)$$

По субгармоническому ядру k вводим функцию [8, § 1.2, (1.9)]

$$Q_k^\nu(z) := \int_{\Omega} (k(\zeta, 0) - k(\zeta, z))^+ d\nu(\zeta), \quad z \in \Omega, \quad (1.10)$$

которая принадлежит классу $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ [8, предложения 1.1–1.2].

Пусть $\text{Hol}(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций f , снабженное, когда необходимо, топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть $f \in \text{Hol}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ на Ω . Последовательность нулей функции f в Ω , перенумерованную с учетом кратности, обозначаем через Zero_f . Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность нулей для подкласса $H \subset \text{Hol}(\Omega)$ (пишем $\Lambda \in \text{Zero}(H)$), если найдется функция $f \in H$ такая, что $\Lambda = \text{Zero}_f$ (с учетом кратности). Функция $f \in \text{Hol}(\Omega)$, если $\Lambda \subset \text{Zero}_f$ (пишем $f(\Lambda) = 0$). Последовательность Λ — подпоследовательность нулей для подкласса $H \subset \text{Hol}(\Omega)$, если существует функция $f \not\equiv 0$ на Ω из класса H , обращающаяся в нуль на Λ . Очевидно, любая последовательность нулей для класса H будет и подпоследовательностью нулей для этого же класса [8].

Функция $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$, называемая далее в рассматриваемом контексте *весовой*, *весом* или *функцией-мажорантой*, порождает весовой подпространство (весовой класс)

$$\text{Hol}(\Omega; M) := \left\{ f \in \text{Hol}(\Omega) : \sup_{z \in \Omega} \frac{|f(z)|}{\exp M(z)} < +\infty \right\}.$$

Очевидно, $\text{Hol}(\Omega; M) = \text{Hol}(\Omega; M + C)$ для любой постоянной C .

Основным объектом нашего исследования будут определенные свойства таких пространств а также их объединений или пересечений, а именно: распределение (под)последовательностей нулей в них и возможность представления мероморфной функции в виде отношения функций именно из этих классов.

В частности, могут рассматриваться алгебры

$$\text{Alg}_M^\infty(\Omega) := \left\{ f \in \text{Hol}(\Omega) : \limsup_{z \rightarrow \partial\Omega} \frac{\log |f(z)|}{M(z)} < +\infty \right\} = \bigcup_{c>0} \text{Hol}(\Omega; cM) \quad (1.11)$$

с положительной на Ω функцией M .

При фиксированном подмножестве $S_0 \Subset \Omega$, содержащем 0, через $\mathcal{U}_{S_0}^d(\Omega)$ обозначаем всевозможные связные объединения $D \supset S_0$ конечного числа кругов $D(z_j, t_j) \Subset \Omega$, $j = 1, \dots, m$, исключая те области D , в дополнении $\mathbb{C} \setminus D$ которых есть изолированные точки. Это — частный случай регулярной оптимально исчерпывающей системы области Ω с центром S_0 (см. [8, определение 1, пример 1]). Если область Ω изначально однозначно определена, то полагаем $\mathcal{U}_{S_0}^d(\Omega) =: \mathcal{U}_{S_0}^d$.

Для области $D \Subset \mathbb{C}$, через $g_D(\cdot, z)$ обозначаем *продолженную функцию Грина* для D с полюсом в $z \in D$ [2, п. 5.7.4], т. е. $g_D(\zeta, z) \equiv 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и $g(\zeta, z)$ — субгармоническая функция от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$. Соответственно, $\omega_D(z, \cdot)$ — гармоническая мера в точке z относительно области $D \Subset \mathbb{C}$ [2, п. 5.7.1].

Пусть функция $\sigma: \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяет ограничениям

$$0 < \sigma(z) < \text{dist}(z, \partial\Omega) =: \inf\{|z - w|: w \in \partial\Omega\}, \quad \forall z \in \Omega. \quad (1.12)$$

Тогда для функции $F \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ переменное усреднение $F^{*\sigma}$ определяется через усредняющую вероятностную меру

$$m^{(\sigma(z))} := \frac{1}{m^{\text{rad}}(\sigma(z))} m|_{D(\sigma(z))} \quad (1.13)$$

следующим образом:

$$F^{*\sigma}(z) := \int_{D(\sigma(z))} F(z + w) dm^{(\sigma(z))}(w), \quad z \in \Omega. \quad (1.14)$$

При дополнительном условии непрерывности функции σ из (1.12) это переменное усреднение также непрерывно. Кроме того, для субгармонических на Ω функций M всегда справедливо неравенство $M(z) \leq M^{*\sigma}(z)$ для всех точек $z \in \Omega$. Отбрасывая значительную часть информации из работы [8], здесь формулируется (с учетом [8, § 1.3, замечание 2])

Теорема А. Пусть $M(0) > -\infty$ — субгармоническая функция на области $\Omega \ni 0$ с мерой Рисса $\nu := \nu_M$ и подходящим субгармоническим ядром k . Положим для сжатости обозначения $Q := Q_k^\nu$ (см. (1.10)). Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$ — последовательность точек и $0 \notin \Lambda$, а f_Λ — некоторая голоморфная в Ω функция с последовательностью нулей $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda = \{\lambda_k\}$. Тогда

(Z) если выполнено хотя бы одно из следующих трех соотношений

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{S_0}^d} \left(\int_{\Omega} \log |f_\Lambda(z)| d\omega_D(0, z) - \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) \right) < +\infty, \quad (1.15f)$$

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{S_0}^d} \left(\sum_k g_D(\lambda_k, 0) - \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_M(\zeta) \right) < +\infty, \quad (1.15g)$$

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{S_0}^d} \left(\sum_k g_D(\lambda_k, 0) - \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) \right) < +\infty, \quad (1.15h)$$

то при любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей (1.12), Λ — последовательность нулей для класса $\text{Hol}(\Omega; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma})$;

(U) если $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$ — подпоследовательность нулей для некоторой ненулевой функции из $\text{Hol}(\Omega; M)$, $0 \notin \Lambda$, то Λ — последовательность нулей для некоторой функции из $\text{Hol}(\Omega; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma})$;

(M) если мероморфная в Ω функция $f = g/q$ представлена в виде отношения двух функций $g, q \in \text{Hol}(\Omega)$, $\max\{|g(0)|, |q(0)|\} \neq 0$, для которых выполнено одно из следующих двух условий

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{S_0}^d} \left(\int_{\Omega} \log \max\{|g(z)|, |q(z)|\} d\omega_D(0, z) - \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) \right) < +\infty, \quad (1.16h)$$

$$g, q \in \text{Hol}(\Omega; M), \quad (1.16M)$$

то найдутся функции g_0 и q_0 из класса $\text{Hol}(\Omega; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma})$ без общих нулей, с которыми также выполнено представление $f = g_0/q_0$ на Ω .

Если функция M непрерывна, а функцию Q_ν^k заменить на мажорирующую ее почти всюду по мере Лебега t непрерывную функцию, по-прежнему обозначаемую Q , то в теореме А можно “забыть” об априорной функции σ и всюду заменить пространства $\text{Hol}(\Omega; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma})$ на $\text{Hol}(\Omega; M + Q)$. Кроме того, условие (1.15h) в [8, теорема 2] не фигурирует, но по формуле Пуассона–Йенсена [2], оно, очевидно, эквивалентно (1.15g).

Из формулировки теоремы А становится ясным, что одна из основных проблем в ее применениях — это оценивание интеграла Q_k^ν из (1.10), который полностью определяется субгармонической функцией-мажорантой M , поскольку ν — это мера Рисса функции M , а k — подходящее субгармоническое ядро для меры ν , или функции M .

Наиболее простой случай $M \equiv 0$ в качестве примеров различных классических теорем Неванлинны для конечносвязных областей и для круга \mathbb{D} был подробно рассмотрен в работе [8] (см. Предложения 1.3 и 1.4, а также теоремы Неванлинны о нулях и о функциях ограниченной характеристики). В § 2 настоящей статьи мы дополнительно даем некоторую “нерадиальную” версию теоремы Неванлинны.

В § 3 решается более трудная задача, основанная на применении общего метода выметания из [8] к классам голоморфных и мероморфных в круге \mathbb{D} функций умеренного и медленного роста, определяемым мажорантами вида (1.2) с подходящими ядрами Бомаша \bar{b}_2 . В §§ 5,6 получены существенно более тонкие результаты, касающиеся весовых пространств (не алгебр!) $\text{Hol}(\Omega; M)$ с подходящим ядром Бомаша \bar{b}_2 для M с особым упором на радиальные веса M в § 4 и модельное здесь *равномерное пространство Бергмана* (термин из [12]) в §§ 5,6, т.е. случай $M: z \rightarrow -\log(1 - |z|)$, $z \in \mathbb{D}$. Несмотря на кажущуюся узость таких классов, им посвящено значительное число работ (см. [13]), история которых в степени, необходимой нам, излагается в отдельных параграфах. Важно и то, что теоремы 4–6, которые вытекают исключительно из теоремы 2 или ее следствия — теоремы 3, имеют форму критерия. Это показывает, что теоремы 2 и 3 *точны* как минимум в широком классе радиальных весов M , определяющих рассматриваемые весовые пространства в круге.

Ссылка на номер формулы или утверждения над знаками (не)равенства, включения, или, более общо, бинарного отношения, означает, что при переходе к правой части этого отношения применялись, в частности, и отмеченная формула или утверждение.

§ 2. Не положительные нерадиальные версии теорем Неванлинны

Функция $M: \mathbb{D} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ называется *радиальной*, если $M(z) = M(|z|)$ для каждой точки $z \in \mathbb{D}$. Эта функция *не положительна*, если существуют точки $z \in \mathbb{D}$, для которых $M(z) < 0$. Можно построить значительный запас

субгармонических ограниченных сверху в \mathbb{D} функций $M \not\equiv -\infty$, которые достаточно быстро убывают к $-\infty$ при приближении к точкам окружности $\partial\mathbb{D}$ по некасательным направлениям, т. е. внутри некоторых углов с вершинами в этих точках, симметричных относительно радиуса раствора $< \pi$. Правда, по теореме Лузина–Привалова множество таких точек на единичной окружности не может быть положительной линейной меры на $\partial\mathbb{D}$. Такое же убывание к $-\infty$ может наблюдаться на достаточно частой последовательности точек.

Простейший пример такой функции — это гармоническая функция

$$M: z := re^{i\theta} \rightarrow \operatorname{Re} \frac{-1}{1-z} = \frac{-1-r\cos\theta}{|1-z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, r \geq 0, \quad (2.1)$$

стремящаяся к $-\infty$ как $O(-1/|1-z|^2)$ при $z \rightarrow 1$ по некасательным направлениям. Естественно, что то же самое относится к усреднениям

$$A_M^{[\varepsilon]}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(z + \varepsilon(1-|z|)e^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (2.2)$$

Ограниченные сверху субгармонические добавки могут усложнить эту функцию, оставив скорость убывания усреднений по некасательным направлениям близкой к скорости убывания исходной функции M из (2.1).

Напомним, что в теоремах же Неванлинны, приведенных, к примеру, и в [8], речь шла лишь о постоянных функциях-мажорантах $M \equiv 0$ на \mathbb{D} .

Из совместных результатов-критериев Ю. И. Любарского и К. Сейпа можно сконструировать много функций, обладающих свойством убывания к $-\infty$ при приближении к значительной части точек единичной окружности. Конкретнее, для произвольной возрастающей функции $p: [0, 1) \rightarrow [1, +\infty)$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 \frac{dr}{(1-r)p(r)} = +\infty, \quad (2.3)$$

и для произвольной последовательности точек $\Gamma = \{\gamma_k\} \subset \mathbb{D}$, разделенной в том смысле, что

$$\inf_{j \neq k} \left| \frac{\gamma_j - \gamma_k}{1 - \bar{\gamma}_j \gamma_k} \right| > 0 \quad (2.4)$$

следует

[14, теорема 2] существование субгармонической функции $u \not\equiv -\infty$, ограниченной сверху на \mathbb{D} , для которой

$$\int_{\{z \in \mathbb{D}: u(z) < -p(|z|)\}} \frac{dm(z)}{1-|z|} = +\infty; \quad (2.5)$$

[14, теорема 1] существование ограниченной сверху голоморфной в \mathbb{D} функции $f \not\equiv 0$ такой, что $\log |f(\gamma_k)| \leq -p(|\gamma_k|)$ для всех k .

Из последней голоморфной функции f легко получить пример и *непрерывной* субгармонической функции на \mathbb{D} , для которой $u(\gamma_k) \leq -p(|\gamma_k|)$ при всех k . Для этого достаточно вынести функцию $\log |f|$ из непересекающихся кругов $D(\lambda_k, \varepsilon_k)$ достаточно малых радиусов ε_k с центрами в нулях $\{\lambda_k\} = \text{Zero}_f$ функции f , т.е. заменить в этих кругах функции $\log |f|$ на интеграл Пуассона [7, теорема 2.4.5 (о склеивании)]. С помощью той же процедуры функции $\log |f|$, поставляемых примерами (см. монографию И.И. Привалова [15, гл. IV, § 3]) ограниченных голоморфных в \mathbb{D} функций f с граничными значениями, равными нулю на заданном множестве E меры нуль на единичной окружности, можно превратить в непрерывные ограниченные сверху не положительные субгармонические функции, стремящиеся к $-\infty$ при приближении к E .

Более подробную информацию по вопросам построения достаточно быстро убывающих к $-\infty$ голоморфных и субгармонических функций в круге и в других областях можно получить из совместного обзора В.Я. Эйдермана и М. Эссена [16, теоремы 3.1, 4.1, следствия 3.2, 4.5(2), лемма 4.3].

Вся предшествующая часть § 2 позволяет считать мотивированными следующие версии теорем Неванлинны.

Для $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ и числа $a > 0$ введем в рассмотрение полярный прямоугольник

$$\Xi(z; a) := \{ \zeta = te^{i\psi} : (r - a\sqrt{1-r^2})^+ \leq t < 1, |\sin(\psi - \theta)| < a\sqrt{1-r^2} \} \quad (2.6)$$

относительного размера a и функцию

$$q_M^{[a]}(z) := \frac{1}{1-|z|} \int_{\Xi(z;a)} (1-|\zeta|) d\nu_M(\zeta). \quad (2.7)$$

Теорема 1. Пусть M — субгармоническая функция в \mathbb{D} , $M(0) > -\infty$ и имеет место ограничение

$$\sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} M(re^{i\theta}) d\theta < +\infty, \quad (2.8)$$

эквивалентное выполнению для ее меры Рисса $\nu := \nu_M$ условия Бляшке

$$\int_0^1 (1-t) d\nu^{\text{rad}}(t) < +\infty. \quad (2.9)$$

Тогда

(Z) если при $\Omega = \mathbb{D}$ выполнено хотя бы одно из трех условий (1.15), то при любых числах $\varepsilon \in (0, 1)$ и $1 < a < 2$ последовательность Λ — последовательность нулей для пространства

$$\text{Hol}\left(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]} + \frac{C_\varepsilon}{2-a} q_M^{[a]}\right), \quad (2.10)$$

где постоянная C_ε зависит только от ε ;

(U) если Λ — подпоследовательность нулей для $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, то это последовательность нулей для пространства (2.10);

(M) если мероморфная в \mathbb{D} функция $f = g/q$ представлена в виде отношения двух функций $g, q \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $\max\{|g(0)|, |q(0)|\} \neq 0$, для которых выполнено одно из двух условий (1.16h)–(1.16M) при $\Omega = \mathbb{D}$, то найдутся функции g_0 и q_0 из класса (2.10) без общих нулей, для которых также справедливо представление $f = g_0/q_0$ на \mathbb{D} .

Доказательство. Доказательство будет разбито на 4 шага — в основном для оценки сверху интеграла $Q = Q_\nu^k$ из (1.10), равного в данном случае

$$Q(z) := \int_{\mathbb{D}} (\bar{b}_1(\zeta, 0) - \bar{b}_1(\zeta, z))^+ d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (2.11)$$

поскольку по условию Бляшке (2.9) именно логарифмическое ядро \bar{b}_1 является подходящим для нашей меры $\nu = \nu_M$. В явном виде

$$Q(z) := \int_{\mathbb{D}} \left(\log |\zeta|^2 - \log \left| \frac{\bar{\zeta}(\zeta - z)}{1 - \bar{\zeta}z} \right| \right)^+ d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (2.12)$$

Для требуемой оценки нам достаточно в случае положительного $z = x \geq 0$ описать фактическую область интегрирования

$$S_1^+(z) := \left\{ \zeta \in \mathbb{D} : |\zeta|^2 > \left| \frac{\bar{\zeta}(\zeta - x)}{1 - \bar{\zeta}x} \right| \right\} = \{ \zeta \in \mathbb{D} : \rho(\zeta, x) < |\zeta| \}. \quad (2.13)$$

Шаг 1. Ограничения на $S_1^+(z)$. Пусть $\zeta = te^{i\psi}$, $0 \leq t < 1$. Решаем неравенство

$$t^2 > \frac{t|te^{i\psi} - x|}{|1 - te^{-i\psi}x|}. \quad (2.14)$$

Возводя обе части в квадрат, переходим к эквивалентному неравенству

$$t^2 > \frac{t^2 - 2tx \cos \psi + x^2}{1 - 2tx \cos \psi + t^2x^2}. \quad (2.15)$$

Решая его относительно $\cos \psi$, находим

$$\cos \psi > x \frac{1 + t^2}{2t} \geq x, \quad (2.16)$$

откуда имеем

$$|\sin \psi| < \sqrt{1 - x^2} \quad \text{при } \zeta = te^{i\psi} \in S_1^+(x). \quad (2.17)$$

Затем, огрубляя левую часть (2.16) до 1, из квадратного относительно t неравенства $xt^2 - 2t + x$ находим ограничения

$$1 > t > \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \geq x - \sqrt{1 - x^2}. \quad (2.18)$$

Таким образом, из двух последних неравенств, используя повороты круга на угол $-\theta$, получаем включение

$$S_1^+(z) \stackrel{(2.6)}{\subset} \Xi(z; 1). \quad (2.19)$$

Покажем, кроме того, что при $|z| > 2/3$ круг $D(z, 1 - |z|)$ содержится в $\Xi(z; 1)$. Вновь достаточно обойтись случаем $z = x > 0$. Расстояние от точки x согласно (2.18) до самой удаленной точки полярного квадрата $\Xi(x; 1)$ на отрезке $[0, x]$ равно $\sqrt{1 - x^2}$, что больше $1 - x$ при всех $0 < x < 1$. Кроме того, ввиду равенства $\sin \psi = \pm \sqrt{1 - x^2}$ для точек $\zeta = te^{i\psi}$, лежащих на двух ограничивающих полярный квадрат $\Xi(x; 1)$ частях радиусов круга \mathbb{D} , расстояние до этих частей равно $x\sqrt{1 - x^2}$. Неравенство $1 - x \leq x\sqrt{1 - x^2}$ эквивалентно неравенству $1 - x \leq x^2(1 + x) \iff 1 \leq x^3 + x^2 + x$. Последнее гарантированно выполнено при $x \geq 2/3$. Следовательно,

$$D(z, 1 - |z|) \stackrel{(2.6)}{\subset} \Xi(z; 1) \text{ при всех } 2/3 \leq |z| < 1. \quad (2.20)$$

Шаг 2. Подынтегрального выражение из (2.12) на $\Xi(z; 1) \supset S_1^+(z)$. Из явного вида подынтегрального выражение из (2.11)–(2.12) получаем

$$(\bar{b}_1(\zeta, 0) - \bar{b}_1(\zeta, x))^+ = \log^+ \frac{|\zeta||1 - \bar{\zeta}x|}{|\zeta - x|}. \quad (2.21)$$

При произвольном заданном $0 < \varepsilon < 1$ и $z = x \geq 2/3$ оценим его сверху в круге $D(x, \varepsilon(1 - x))$:

$$(\bar{b}_1(\zeta, 0) - \bar{b}_1(\zeta, x))^+ \leq \log \left| \frac{\varepsilon(1 - x)}{\zeta - x} \right| + \log^+ \frac{|\zeta||1 - \bar{\zeta}x|}{\varepsilon|1 - x|}.$$

Здесь первое слагаемое в правой части — это в точности функция Грина для круга $D(x, \varepsilon(1 - x))$ с полюсом в центре этого круга. Таким образом, последнее неравенство можно продолжить как

$$(\bar{b}_1(\zeta, 0) - \bar{b}_1(\zeta, x))^+ \leq g_{D(x, \varepsilon(1-x))}(\zeta, x) + \log^+ \frac{|1 - \bar{\zeta}x|}{\varepsilon|1 - x|} \quad (2.22)$$

для всех $\zeta \in D(x, \varepsilon(1 - x))$. Но для последнего слагаемого в этом случае

$$\begin{aligned} \log^+ \frac{|1 - \bar{\zeta}x|}{\varepsilon|1 - x|} &\leq \log \frac{1}{\varepsilon} + \log^+ \left| \frac{(1 - x^2) + (x^2 - \bar{\zeta}x)}{1 - x} \right| \\ &\leq \log \frac{1}{\varepsilon} + \log^+ \left((1 + x) + x \frac{|x - \bar{\zeta}|}{1 - x} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\zeta \in D(x, \varepsilon(1 - x))$, то $|x - \bar{\zeta}| \leq \varepsilon(1 - x)$ и переходим к оценке

$$\log^+ \frac{|1 - \bar{\zeta}x|}{\varepsilon|1 - x|} \leq \log \frac{1}{\varepsilon} + \log(1 + x + \varepsilon x) \leq \log \frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}. \quad (2.23)$$

Но для компактной формы окончательного результата доказываемой теоремы нам придется несколько усложнить правую часть. При $\zeta \in D(x, \varepsilon(1-x))$ имеем

$$\frac{1-|\zeta|}{1-x} \geq \frac{1-(x+\varepsilon(1-x))}{1-x} \geq 1-\varepsilon,$$

что преобразует неравенство (2.23) в

$$\log^+ \frac{|1-\bar{\zeta}x|}{\varepsilon|1-x|} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{1-|\zeta|}{1-x}. \quad (2.24)$$

Таким образом, для всех точек $\zeta \in D(z, \varepsilon(1-|z|))$ при $2/3 \leq |z| < 1$ и $0 < \varepsilon < 1$ получаем оценку

$$(\bar{b}_1(\zeta, 0) - \bar{b}_1(\zeta, z))^+ \leq g_{D(z, \varepsilon(1-|z|))}(\zeta, z) + C_\varepsilon \frac{1-|\zeta|}{1-|z|}, \quad (2.25)$$

где постоянная $C_\varepsilon = \frac{1}{1-\varepsilon} \log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$ зависит только от ε .

Оценим подынтегральное выражение на множестве

$$\Xi(z; 1) \setminus D(z, \varepsilon(1-|z|)).$$

Вновь достаточно ограничиться случаем $z = x \geq 2/3$. Из представления (2.12), учитывая неравенство $|\zeta - x| \geq \varepsilon(1-x)$, получаем

$$(\bar{b}_1(\zeta, 0) - \bar{b}_1(\zeta, z))^+ = \log^+ \left| 1 + \frac{x(1-|\zeta|^2)}{\zeta - x} \right| \leq \frac{x(1-|\zeta|^2)}{\varepsilon|1-x|} \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{(1-|\zeta|)}{|1-x|}.$$

Из двух последних оценок окончательно получаем оценку вида (2.25) всюду в $\Xi(z; 1)$ при всех $2/3 \leq |z| < 1$, поскольку функция Грина $g_{D(z, \varepsilon(1-|z|))}$ рассматривается как продолженная нулем вне $D(z, \varepsilon(1-|z|))$, а через C_ε можно переобозначить наибольшее из двух чисел: первоначального C_ε и $2/\varepsilon$.

Шаг 3. Верхняя оценка интеграла (2.11). Из результатов предыдущих двух шагов следует, что при $|z| \geq 2/3$

$$\begin{aligned} Q(z) &\leq \int_{\Xi(z; 1)} \left(g_{D(z, \varepsilon(1-|z|))}(\zeta, z) + C_\varepsilon \frac{1-|\zeta|}{1-|z|} \right) d\nu_M(\zeta) \\ &= \int_{D(z, \varepsilon(1-|z|))} g_{D(z, \varepsilon(1-|z|))}(\zeta, z) d\nu_M(\zeta) + \frac{C_\varepsilon}{1-|z|} \int_{\Xi(z; 1)} (1-|\zeta|) d\nu_M(\zeta) \\ &= A_M^{[\varepsilon]}(z) - M(z) + C_\varepsilon q_M^{[1]}(z), \quad (2.26) \end{aligned}$$

где в обозначении (2.2) на последнем шаге использованы классическая формула Пуассона-Йенсена [2]

$$M(z) = A_M^{[\varepsilon]}(z) - \int_{D(z, \varepsilon(1-|z|))} g_{D(z, \varepsilon(1-|z|))}(\zeta, z) d\nu_M(\zeta) \quad (2.27)$$

и обозначение (2.7).

Ниже при применении теоремы А нам придется иметь дело с переменным усреднением (1.14) по выбираемой нами произвольной функции $\sigma \in C(\mathbb{D})$ на $\Omega = \mathbb{D}$, удовлетворяющей лишь условию (1.12) $0 < \sigma(z) < \text{dist}(z, \partial\Omega)$. Поэтому сразу отметим, что в силу непрерывности функции $A_M^{[\varepsilon]}$ и явного вида функции $q_M^{[1]}$ из (2.7) для любого числа $a \in (1, 2)$ непрерывную функцию $\sigma(z) < (a-1)(1-|z|)$ можно подобрать столь малой, что

$$\begin{aligned} (A_M^{[\varepsilon]}(z))^{*\sigma} &\leq A_M^{[\varepsilon]}(z) + 1 \quad \text{при всех } z \in \mathbb{D}, & (2.28A) \\ (q_M^{[1]}(z))^{*\sigma} &\leq \sup_{|z-w| \leq \sigma(z)} q_M^{[1]}(w) \\ &\leq \frac{1}{(1-|z| - (a-1)(1-|z|))} \sup_{|z-w| \leq \sigma(z)} \int_{\Theta(w;1)} (1-|\zeta|) d\nu_M(\zeta) \\ &\leq \frac{1}{2-a} \frac{1}{1-|z|} \int_{\Theta(z;a)} (1-|\zeta|) d\nu_M(\zeta) = \frac{1}{2-a} q_M^{[a]}(z) & (2.28q) \end{aligned}$$

также при всех $z \in \mathbb{D}$.

Шаг 4. Доказательство пп. (Z),(U),(M) теоремы 1. По предыдущим шагам при выбранной в п. 3 доказательства непрерывной функции σ из (2.26) с учетом (2.28A) и (2.28q) с произвольной постоянной $a > 1$ получаем, что при $|z| \geq 2/3$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} M^{*\sigma}(z) + Q^{*\sigma}(z) &\leq M^{*\sigma}(z) + (A_M^{[\varepsilon]}(z) + 1) - M^{*\sigma}(z) + 2C_\varepsilon q_M^{[a]}(z) \\ &= A_M^{[\varepsilon]}(z) + \frac{2C_\varepsilon}{2-a} q_M^{[a]}(z) + 1, & (2.29) \end{aligned}$$

При этом для $|z| \leq 2/3$ правая часть последнего неравенства ограничена снизу константой, так как функция-усреднение $A_M^{[\varepsilon]}$ непрерывна всюду на \mathbb{D} , а последнее слагаемое в (2.29) положительно. В силу непрерывности функции $M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}$ на \mathbb{D} (см. комментарий после (1.13) к переменному усреднению (1.14), а также после (1.10)) можно подобрать постоянную $C \geq 0$ столь большой, что

$$M^{*\sigma}(z) + Q^{*\sigma}(z) \leq A_M^{[\varepsilon]}(z) + \frac{2C_\varepsilon}{2-a} q_M^{[a]}(z) + C \quad (2.30)$$

уже для всех точек $z \in \mathbb{D}$. Отсюда по п. (Z) теоремы А при $\Omega = \mathbb{D}$ в условиях п. (Z) теоремы 1 последовательность Λ — последовательность нулей для пространства

$$\begin{aligned} \text{Hol}(\mathbb{D}; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}) &\subset \text{Hol}\left(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]}(z) + \frac{2C_\varepsilon}{2-a} q_M^{[a]}(z) + C\right) \\ &= \text{Hol}\left(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]}(z) + \frac{2C_\varepsilon}{2-a} q_M^{[a]}(z)\right). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично при $\Omega = \mathbb{D}$ из пп. (U) и (M) теоремы А следуют пп. (U) и (M) теоремы 1.

Теорема доказана. •

При определенном радиальном поведении веса M в отдельных секторах в круге \mathbb{D} возможна модификация результатов теоремы 1.

Функция $M: z = re^{i\theta} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ называется *радиальной в секторе*

$$\angle(\alpha, \beta) := \{z = re^{i\theta} : 0 \leq r < 1, \alpha < \theta < \beta\} \quad (2.31)$$

из \mathbb{D} , если при каждом $0 \leq r < 1$ функция $M(re^{i\theta})$ не зависит от $\theta \in \angle(\alpha, \beta)$.

Следствие. Если в каком-либо строго объемлющем секторе $\angle(\alpha', \beta') \supset \angle(\alpha, \beta)$ в том смысле, что $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$, вес M из теоремы 1 радиален и дифференцируем по радиусу, то при a из достаточно малой правой окрестности 1 для всех трех утверждений (Z), (U) и (M) этой теоремы для точек $z \in \angle(\alpha, \beta)$ слагаемое $\frac{C_\varepsilon}{2-a} q_M^{[a]}(z)$ в весе, определяющем пространство (2.10), можно заменить при выборе достаточно малого $a > 1$ на слагаемое

$$\frac{aC_\varepsilon}{2(2-a)} \frac{1}{\sqrt{1-|z|}} \int_{(|z|-a\sqrt{1-|z|^2})^+}^1 (1-t) d(tM'(t)). \quad (2.32)$$

Доказательство. Сужение меры Рисса ν_M на сектор, объемлющий сектор $\angle(\alpha, \beta)$, ввиду радиальности M в этом секторе имеет вид

$$d\nu_M(z) = \frac{1}{2\pi} d\theta \otimes d(tM'(t)), \quad z := te^{i\theta}, \quad 0 \leq t < 1, \quad (2.33)$$

При достаточно малом $a < 1$ из описания полярного прямоугольника $\Xi(z; a)$ в (2.6) найдется $c < 1$, для которого для всех $z = re^{i\theta}$ при $r \geq c$ независимо от $\theta \in (\alpha, \beta)$ имеем $\Xi(z; a) \subset \angle(\alpha, \beta)$. Отсюда при $|z| \geq c$ и $z \in \angle(\alpha, \beta)$ из вида (2.7) функции $q_M^{[a]}(z)$ согласно (2.33) получаем

$$\begin{aligned} q_M^{[a]}(z) &= \frac{1}{1-|z|} \int_{\Xi(z; a)} (1-|\zeta|) d\nu_M(\zeta) \\ &= \frac{1}{1-r} \cdot \frac{\arcsin a\sqrt{1-r^2}}{2\pi} \int_{r-a\sqrt{1-r^2}}^1 (1-t) d(tM'(t)) \\ &\leq \frac{1}{1-r} \cdot \frac{(\pi/2)a\sqrt{1-r^2}}{2\pi} \int_{r-a\sqrt{1-r^2}}^1 (1-t) d(tM'(t)) \\ &\leq \frac{a}{2} \frac{1}{\sqrt{1-|z|}} \int_{|z|-a\sqrt{1-|z|^2}}^1 (1-t) d(tM'(t)). \end{aligned}$$

Тем самым возможность требуемой в следствии замены доказана при $|z| \geq c$. На весь сектор $\angle(\alpha, \beta)$ она распространяется так же, как в п. 4 доказательства теоремы 1, за счет непрерывности $M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}$ на \mathbb{D} . •

§ 3. Веса с подходящим ядром Бомаша \bar{b}_2

Рассматриваемый в этом параграфе случай оказался для нас технически гораздо более сложным. Он тесно связан с равномерными пространствами Бергмана, которые будут рассмотрены в §§ 5,6 .

Для $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ и числа $a > 0$ введем в рассмотрение полярный прямоугольник

$$\square(z; a) := \{ \zeta = te^{i\psi} : (r - a(1-r))^+ \leq t < 1, |\sin(\psi - \theta)| < a(1-r) \} \quad (3.1)$$

относительного размера a и функцию

$$b_M^{[a]}(z) := \frac{1}{(1-|z|)^2} \int_{\square(z;a)} (1-|\zeta|)^2 d\nu_M(\zeta). \quad (3.2)$$

Теорема 2. Пусть M — субгармоническая функция с мерой Рисса $\nu := \nu_M$, $M(0) > -\infty$ и выполнено условие

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) d\theta dt < +\infty \quad (3.3)$$

или эквивалентное ему ограничение

$$\int_0^1 (1-t)^2 d\nu^{\text{rad}}(t) < +\infty. \quad (3.4)$$

Тогда

(Z) если при $\Omega = \mathbb{D}$ выполнено хотя бы одно из трех условий (1.15), то при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ последовательность Λ — последовательность нулей для пространства

$$\text{Hol}(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_M^{[6]}), \quad (3.5)$$

где постоянная C_ε зависит только от ε ;

(U) если Λ — подпоследовательность нулей для $\text{Hol}(M)$, то это последовательность нулей для пространства (3.5);

(M) если мероморфная в \mathbb{D} функция $f = g/q$ представлена в виде отношения двух функций $g, q \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, $\max\{|g(0)|, |q(0)|\} \neq 0$, для которых выполнено одно из двух условий (1.16h)–(1.16M) при $\Omega = \mathbb{D}$, то найдутся функции g_0 и q_0 из класса (3.5) без общих нулей, с которыми также справедливо представление $f = g_0/q_0$ на \mathbb{D} .

Доказательство. Здесь мы используем только импликацию (3.3) \implies (3.4), поэтому ограничимся лишь ее выводом. Из (3.3) в силу возрастания среднего по окружностям от субгармонической функции M , очевидно, следует

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) d\theta = 0.$$

Тогда из (3.3) интегрированием по частям получаем

$$\int_0^1 t(1-t) d \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) d\theta \right) \leq \int_0^1 (1-t) d \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) d\theta \right) < +\infty.$$

Здесь в левой части для вывода (3.4) остается использовать классическое равенство Пуассона–Йенсена

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) d\theta = \int_0^t \frac{\nu^{\text{rad}}(\tau)}{\tau} d\tau + M(0) \quad (3.6)$$

и снова применить интегрирование по частям.

Теперь вновь, как и при доказательстве теоремы 1, будем оценивать сверху интеграл $Q(z) := Q_k^\nu(z)$ вида (1.10), построенный по субгармоническим ядру Бомаша $k = \bar{b}_2$:

$$Q(z) := \int_{\mathbb{D}} (\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, z))^+ d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3.7)$$

поскольку по условию (3.4) именно логарифмическое ядро \bar{b}_2 является подходящим для нашей меры $\nu = \nu_M$. Преобразуем логарифмическое ядро \bar{b}_2 к виду

$$\bar{b}_2(\zeta, z) := \log |1 - (1 - \bar{B}_\zeta(z))^2| = \log \left| 1 - \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)^2 \right| \quad (3.8a)$$

$$= \log (|\bar{B}_\zeta(z)| |2 - \bar{B}_\zeta(z)|) = \log \frac{|\zeta| |\zeta - z| |2 - |\zeta|^2 - \bar{\zeta}z|}{|1 - \bar{\zeta}z|^2}, \quad (3.8b)$$

откуда интеграл (3.7) имеет вид

$$Q(z) \stackrel{(3.8b)}{=} \int_{\mathbb{D}} \left(\log |\zeta|^2 (2 - |\zeta|^2) - \log (|\bar{B}_\zeta(z)| |2 - \bar{B}_\zeta(z)|) \right)^+ d\nu(\zeta), \quad (3.9B)$$

$$\stackrel{(3.8b)}{=} \int_{S_2^+(z)} \left(\log |\zeta| (2 - |\zeta|^2) - \log \frac{|\zeta - z| |2 - |\zeta|^2 - \bar{\zeta}z|}{|1 - \bar{\zeta}z|^2} \right)^+ d\nu(\zeta), \quad (3.9c)$$

где

$$S_2^+(z) \stackrel{(3.9c)}{=} \left\{ \zeta \in \mathbb{D} : \log |\zeta| (2 - |\zeta|^2) > \log \frac{|\zeta - z| |2 - |\zeta|^2 - \bar{\zeta}z|}{|1 - \bar{\zeta}z|^2} \right\}. \quad (3.10)$$

Для описания области интегрирования $S_2^+(z)$ в (3.9) нам достаточно рассмотреть только случай положительного $z = x \geq 0$, т.е. область

$$S_2^+(x) \stackrel{(3.9B)}{=} \{ \zeta \in \mathbb{D} : |\zeta|^2 (2 - |\zeta|^2) > |\bar{B}_\zeta(x)| |2 - \bar{B}_\zeta(x)| \}. \quad (3.11)$$

Так как $t \rightarrow t^2(2 - t^2)$ — строго возрастающая функция на $[0, 1)$ и $|\bar{B}_\zeta(x)| < 1$ для $\zeta \in \mathbb{D}$, при $\zeta \in S_2^+(x)$ ввиду (3.11) имеем $|\zeta|^2 > |\bar{B}_\zeta(x)|$, т.е., $|\zeta| > \rho(\zeta, x)$. Таким образом, согласно (2.13) получаем

$$S_2^+(x) \subset S_1^+(x), \quad \forall x \in [0, 1). \quad (3.12)$$

В силу включения (2.19) множества $S_1^+(x)$ в $\Xi(x; 1)$ это значит, в частности, что область $S_2^+(x)$ лежит в правой полуплоскости при всех $x > 0$.

Далее доказательство также разбивается на 4 шага.

Шаг 1. Ограничения на $S_2^+(z)$. Пусть $\zeta = te^{i\psi}$, $0 \leq t < 1$, $z = x > 0$. Ввиду (3.10) при $\zeta \in S_2^+$ должно выполняться неравенство

$$\log(|\zeta|(2 - |\zeta|^2)) > \log \frac{|\zeta - x||2 - |\zeta|^2 - \bar{\zeta}x|}{|1 - \bar{\zeta}x|^2}$$

Перепишем это неравенство в полярной форме:

$$\begin{aligned} t^2(2 - t^2)^2 &> \frac{(t^2 - 2tx \cos \psi + x^2)((2 - t^2)^2 - 2(2 - t^2)tx \cos \psi + t^2x^2)}{(1 - 2tx \cos \psi + t^2x^2)^2} \\ &= \frac{((t - x)^2 + 4tx \sin^2(\psi/2))((2 - t^2 - tx)^2 + 4(2 - t^2)tx \sin^2(\psi/2))}{((1 - tx)^2 + 4tx \sin^2(\psi/2))^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для удобства положим

$$s := \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (3.14)$$

Кроме того, $2 - t^2 \geq t^2(2 - t^2)^2$ для $t \in [0, 1)$. Следовательно, неравенство (3.13) влечет за собой

$$2 - t^2 > \frac{((t - x)^2 + 4txs)((2 - t^2 - tx)^2 + 4(2 - t^2)txs)}{((1 - tx)^2 + 4txs)^2},$$

откуда прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} s \cdot q(t, x) &:= s \cdot 4tx((2 - t^2 - tx)^2 + (t - x)^2(2 - t^2) - 2(1 - tx)^2(2 - t^2)) \\ &< (1 - tx)^4(2 - t^2) - (t - x)^2(2 - t^2 - tx)^2 =: p(t, x), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где многочлены q и p определены соответственно первым и вторым равенствами. При этом для многочлена q удается получить следующее разложение на множители:

$$q(t, x) = 8x^3t(1 - t^2)^2 > 0, \quad t \in (0, 1), \quad x \in (0, 1).$$

Это позволяет получить верхнюю оценку для s :

$$\begin{aligned} s < \frac{p(t, x)}{q(t, x)} &= \frac{(1 - tx)^4(2 - t^2) - (t - x)^2(2 - t^2 - tx)^2}{8tx^3(1 - t^2)^2} \\ &= \frac{(1 - t)^2(1 + t^2)(-t^2 - x^4t^2 + 4x^3t + 2 - 4x^2)}{8x^3t(1 - t^2)^2} \\ &= \frac{1}{8x^3t} (-t^2 - x^4t^2 + 4x^3t + 2 - 4x^2) \\ &= \frac{1}{8x^3t} (-(1 + x^4)t^2 + (4x^3)t + 2(1 - 2x^2)) =: \frac{1}{8x^3t} g_x(t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где квадратный трехчлен g_x определен последним равенством. По определению (3.14), $s \geq 0$. Следовательно, квадратный трехчлен $g_x(t)$ обязан быть строго положительным для $\zeta = te^{i\psi} \in S_2^+(x)$, откуда

$$\begin{aligned} t &> \frac{2x^3 - \sqrt{2}(1-x^2)}{1+x^4} = x - \left(x - \frac{2x^3 - \sqrt{2}(1-x^2)}{1+x^4} \right) \\ &= x - (1-x^2) \frac{\sqrt{2} + x(1-x^2)}{1+x^4} \geq x - 2(1-x^2) \geq x - 4(1-x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

В частности,

$$\text{если } x \geq 9/10, \text{ то } t > 1/2. \quad (3.18)$$

Теперь мы должны найти верхнюю оценку для s . Вновь рассмотрим неравенство (3.16). Квадратный трехчлен g_x достигает максимума в точке $t_x = 2x^3/(1+x^4)$, так что

$$\begin{aligned} g_x(t_x) &= -(1+x^4) \left(\frac{2x^3}{1+x^4} \right)^2 + 4x^3 \frac{2x^3}{1+x^4} + 2(1-2x^2) \\ &= \frac{2-4x^2+2x^4}{1+x^4} = \frac{2(1-x^2)^2}{1+x^4} \leq 2(1-x)^2 \max_{0 \leq x < 1} \frac{(1+x)^2}{1+x^4} \leq 5(1-x)^2 \end{aligned}$$

для каждого $x \in [0, 1)$. Отсюда, ввиду (3.14) и (3.16), получаем

$$\sin^2 \frac{\psi}{2} = s < \frac{1}{8x^3t} \cdot 5(1-x)^2.$$

Таким образом, для $x \geq 9/10$ согласно (3.18) имеем $t \geq 1/2$ и

$$|\sin \psi| \leq \sqrt{\frac{1}{8x^3t} \cdot 5(1-x)^2 \cdot 4 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \leq \sqrt{5x^3(1-x)} \leq 3(1-x). \quad (3.19)$$

Отсюда и из (3.17) имеем вложение

$$S_2^+(x) \subset \{ \zeta = te^{i\psi} : x - 4(1-x) < t < 1, \sin |\psi| < 3(1-x) \} \quad (3.20)$$

для всех $9/10 \leq x < 1$, а для $z \in \mathbb{D}$

$$S_2^+(z) \subset \square(z; 4) \text{ при всех } |z| \geq 9/10. \quad (3.21)$$

Шаг 2. Оценка подынтегрального выражения из (3.9) на прямоугольнике $\square(z; 4) \supset S_2^+(z)$. Легко видеть, что при $0 < \varepsilon \leq 1$ и $z \neq 0$ имеет место включение

$$D(z, \varepsilon(1-|z|)) \subset \square(z; 4). \quad (3.22)$$

При $z = x > 0$ из (3.8b) имеем оценку (ср. с (2.22)) через функцию Грина $g_{D(x, \varepsilon(1-x))}(\zeta, x)$ круга $D(x, \varepsilon(1-x))$ с полюсом в x :

$$(\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, x))^+ \leq g_{D(x, \varepsilon(1-x))}(\zeta, x) + \log^+ \frac{|\zeta|(2-|\zeta|^2)|1-\bar{\zeta}x|^2}{\varepsilon(1-x)|2-|\zeta|^2-\bar{\zeta}x|}. \quad (3.23)$$

При $\zeta \in \mathbb{D}$ и $0 \leq x < 1$ получаем $|\zeta|(2 - |\zeta|^2) \leq 2$, а также

$$|2 - |\zeta|^2 - \bar{\zeta}x| = |2 - \bar{\zeta}(\zeta + x)| \geq 2 - |\bar{\zeta}|(|\zeta| + x) \geq 1 - x. \quad (3.24)$$

Кроме того, при $0 < \varepsilon < 1$, $9/10 \leq x < 1$ и $\zeta = te^{i\psi}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |1 - \bar{\zeta}x|^2 &= (1 - tx)^2 + 4tx \sin^2 \frac{\psi}{2} \leq (1 - (x - \varepsilon(1 - x))x)^2 + 4tx \left(\frac{\varepsilon(1 - x)}{x}\right)^2 \\ &\leq (1 - x)^2((1 + x + \varepsilon x)^2 + 4t\varepsilon^2/x) \leq (1 - x)^2(9 + 4/x) \leq 15(1 - x)^2. \end{aligned}$$

Последние неравенства на основе (3.23) дают при $9/10 \leq x < 1$ оценку

$$(\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, x))^+ \leq g_{D(x, \varepsilon(1-x))}(\zeta, x) + \log \frac{30}{\varepsilon}. \quad (3.25)$$

Для удобства записи формулировки доказываемой теоремы с помощью неравенства

$$\frac{(1 - |\zeta|)^2}{(1 - x)^2} \geq \frac{(1 - (x + \varepsilon(1 - x)))^2}{(1 - x)^2} \geq (1 - \varepsilon)^2, \quad \forall \zeta \in \Delta_\varepsilon(x) \quad (3.26)$$

можно ослабить (3.25) до оценки

$$(\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, z))^+ \leq g_{D(z, \varepsilon(1-|z|))}(\zeta, z) + C_\varepsilon \frac{(1 - |\zeta|)^2}{(1 - |z|)^2}, \quad (3.27)$$

выполненной при всех $9/10 \leq |z| < 1$, $\zeta \in D(z, \varepsilon(1 - |z|))$, $0 < \varepsilon \leq 1$, где постоянная $C_\varepsilon = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \log \frac{30}{\varepsilon}$ зависит только от ε .

Оценим теперь при $\zeta \in \square(x; 4) \setminus D(z, \varepsilon(1 - |z|))$, исходя уже из представления (3.8а), то же подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} (\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, x))^+ &= \log^+ \left| \frac{1 - (1 - |\zeta|^2)^2}{1 - \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}x}\right)^2} \right| \\ &= \log^+ \left| 1 + \frac{\left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}x}\right)^2 - (1 - |\zeta|^2)^2}{1 - \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}x}\right)^2} \right| \leq \left| \frac{\left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}x}\right)^2 - (1 - |\zeta|^2)^2}{1 - \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}x}\right)^2} \right| \\ &= (1 - |\zeta|^2)^2 \frac{|1 - (1 - \bar{\zeta}x)^2|}{|(1 - \bar{\zeta}x)^2 - (1 - |\zeta|^2)^2|} = (1 - |\zeta|^2)^2 \frac{(1 + |\zeta|)^2 x |2 - \bar{\zeta}x|}{|\zeta - x| |2 - |\zeta|^2 - \bar{\zeta}x|}. \end{aligned}$$

Отсюда, если используем (3.24) и условие $|\zeta - x| \geq \varepsilon(1 - x)$, то получим

$$(\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, x))^+ \leq (1 - |\zeta|^2)^2 \frac{2^2 \cdot 3}{\varepsilon(1 - x)(1 - x)} = \frac{12}{\varepsilon} \frac{(1 - |\zeta|)^2}{(1 - x)^2}$$

при $|\zeta - x| \geq \varepsilon(1 - x)$.

Таким образом, рассматривая функцию Грина как продолженную, можем утверждать, что оценка (3.27) выполнена при любых $9/10 \leq |z| < 1$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ для всех $\zeta \in \square(z; 4)$ с некоторой постоянной C_ε , зависящей только от ε .

Шаг 3. Верхняя оценка интеграла (3.7), (3.9). При $z = x \geq 9/10$ для оценки интеграла разобьем его на два интеграла:

$$\begin{aligned} Q(x) &\leq \int_{\square(x;4)} (\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, x))^+ d\nu_M(\zeta) \\ &= \left(\int_{D(x,\varepsilon(1-x))} + \int_{\square(x;4) \setminus D(x,\varepsilon(1-x))} \right) (\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, x))^+ d\nu_M(\zeta) \\ &=: I_\varepsilon(x) + J_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Здесь интегралы $I_\varepsilon(x)$ и $J_\varepsilon(x)$ определены последним равенством. Для $I_\varepsilon(x)$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &:= \int_{D(x,\varepsilon(1-x))} (\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, x))^+ d\nu_M(\zeta) \\ &\stackrel{(3.27)}{\leq} \int_{D(x,\varepsilon(1-x))} g_{\Delta_\varepsilon(x)}(\zeta, x) d\nu_M(\zeta) + C_\varepsilon \int_{D(x,\varepsilon(1-x))} \frac{(1 - |\zeta|)^2}{(1-x)^2} d\nu_M(\zeta) \end{aligned}$$

при всех $9/10 \leq x < 1$, где постоянная C_ε зависит только от ε . Тогда по формуле Пуассона–Йенсена (2.27) в обозначении (2.2)

$$I_\varepsilon(x) \leq A_M^{[\varepsilon]}(x) - M(x) + \frac{C_\varepsilon}{(1-x)^2} \int_{D(x,\varepsilon(1-x))} (1 - |\zeta|)^2 d\nu_M(\zeta) \quad (3.28)$$

для всех $9/10 \leq x < 1$.

Для интеграла $J_\varepsilon(x)$ мы имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(x) &:= \int_{\square(x;4) \setminus D(x,\varepsilon(1-x))} (\bar{b}_2(\zeta, 0) - \bar{b}_2(\zeta, x))^+ d\nu_M(\zeta) \\ &\leq C_\varepsilon \int_{\square(x;4) \setminus D(x,\varepsilon(1-x))} \frac{(1 - |\zeta|)^2}{(1-x)^2} d\nu_M(\zeta). \\ &= \frac{C_\varepsilon}{(1-x)^2} \int_{\square(x;4) \setminus D(x,\varepsilon(1-x))} (1 - |\zeta|)^2 d\nu_M(\zeta) \quad (3.29) \end{aligned}$$

Сложение (3.28) и (3.29) в обозначениях (2.2) и (3.2) дает

$$I_\varepsilon(x) + J_\varepsilon(x) \leq A_M^{[\varepsilon]}(x) - M(x) + C_\varepsilon b_M^{[4]}(x)$$

для всех $9/10 \leq x < 1$. Таким образом, из последнего неравенства и из начального в этом пункте разбиения оценки Q на оценку суммы интегралов I_ε и J_ε получаем

$$Q(z) \leq A_M^{[\varepsilon]}(z) - M(z) + C_\varepsilon b_M^{[4]}(z) \quad (3.30)$$

для всех $9/10 \leq |z| < 1$ и $0 < \varepsilon \leq 1$.

Шаг 4. Доказательство пп. (Z),(U),(M) теоремы 2. При переменном усреднении(1.14) по выбираемой нами произвольной функции $\sigma \in C(\mathbb{D})$ на $\Omega = \mathbb{D}$, удовлетворяющей лишь условию (1.12) $0 < \sigma(z) < \text{dist}(z, \partial\Omega)$ в силу непрерывности функции $A_M^{[\varepsilon]}$ и явного вида функции $b_M^{[4]}$ из (2.7) *непрерывную функцию* $\sigma(z) < (1 - |z|)/2$ можно подобрать столь малой, что

$$\begin{aligned} (A_M^{[\varepsilon]}(z))^{*\sigma} &\leq A_M^{[\varepsilon]}(z) + 1 \text{ при всех } z \in \mathbb{D}, \\ (b_M^{[4]}(z))^{*\sigma} &\leq \sup_{|z-w| \leq \sigma(z)} b_M^{[4]}(w) \leq \frac{4}{(1 - |z|)^2} \sup_{|z-w| \leq (1-|z|)/2} \int_{\square(w;4)} (1 - |\zeta|)^2 d\nu_M(\zeta) \\ &\leq \frac{4}{(1 - |z|)^2} \int_{\square(z;6)} (1 - |\zeta|)^2 d\nu_M(\zeta) = 4b_M^{[6]}(z) \end{aligned}$$

также *при всех* $z \in \mathbb{D}$. Отсюда согласно (3.30) при всех $9/10 \leq |z| < 1$ и указанном выборе усредняющей функции σ следует

$$\begin{aligned} M^{*\sigma}(z) + Q^{*\sigma}(z) &\leq M^{*\sigma}(z) + (A_M^{[\varepsilon]}(z) + 1) - M^{*\sigma}(z) + 4C_\varepsilon b_M^{[6]}(z) \\ &= A_M^{[\varepsilon]}(z) + 4C_\varepsilon b_M^{[6]}(z) + 1, \end{aligned} \quad (3.32)$$

а при $|z| < 9/10$ правая часть последнего неравенства ограничена снизу константой, так как функция-усреднение $A_M^{[\varepsilon]}$ непрерывна всюду на \mathbb{D} , а последнее слагаемое в (3.32) положительно. Кроме того, функция $M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}$ непрерывна на \mathbb{D} , поскольку $M, Q \in L^1_{\text{loc}}$ и усредняющая функция σ непрерывна. Следовательно, можно подобрать постоянную $C \geq 0$ столь большой, что

$$M^{*\sigma}(z) + Q^{*\sigma}(z) \leq A_M^{[\varepsilon]}(z) + C_\varepsilon b_M^{[6]}(z) + C \quad (3.33)$$

уже *для всех точек* $z \in \mathbb{D}$, где $4C_\varepsilon$ переобозначено как C_ε . Отсюда по п. (Z) теоремы А при $\Omega = \mathbb{D}$ в условиях п. (Z) теоремы 2 последовательность Λ — последовательность нулей для пространства

$$\begin{aligned} \text{Hol}(\mathbb{D}; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}) &\subset \text{Hol}(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]}(z) + C_\varepsilon b_M^{[6]}(z) + C) \\ &= \text{Hol}(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]}(z) + C_\varepsilon b_M^{[6]}(z)). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично при $\Omega = \mathbb{D}$ из пп. (U) и (M) теоремы А следуют пп. (U) и (M) теоремы 2.

Теорема доказана. •

§ 4. Радиальные версии теоремы 2

Пусть $D \subset \mathbb{D}$ подобласть в \mathbb{D} . В соответствии с обозначением (1.1) естественно рассматривать радиальные проекции гармонической меры в точке 0

$$\omega_D^{\text{rad}}(t) := \omega_D(0, D(t) \cap D). \quad (4.1)$$

Сначала мы дадим форму теоремы 2 при общем радиальном весе M , а затем приведем несколько результатов, вытекающих из теоремы 2 для некоторых конкретных весов M .

Теорема 3. Пусть $M: [0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$ — положительная непрерывная в нуле возрастающая выпуклая от логарифма на $(0, 1)$ функция, т. е. композиция $M \circ \exp$ выпукла на $[-\infty, 0)$, а M'_- — ее левая производная и

$$\int_0^1 M(t) dt < +\infty. \quad (4.2)$$

Продолжим ее на \mathbb{D} как радиальную функцию $M(z) \equiv M(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$, сохранив для продолженной функции прежнее обозначение M .

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{D}$ — последовательность точек и $0 \notin \Lambda$, а f_Λ — некоторая голоморфная в \mathbb{D} функция с последовательностью нулей $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda = \{\lambda_k\}$. Тогда

(Z_r) если при некотором $a < 1$ в обозначении $\mathcal{U}_{D(a)}^d(\mathbb{D}) =: \mathcal{U}_{D(a)}^d$ выполнено хотя бы одно из следующих трех соотношений

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{D(a)}^d} \left(\int_{\mathbb{D}} \log |f_\Lambda(z)| d\omega_D(0, z) - \int_0^{1^-} M(t) d\omega_D^{\text{rad}}(t) \right) < +\infty, \quad (4.3f)$$

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{D(a)}^d} \left(\sum_k g_D(\lambda_k, 0) - \int_0^{1^-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_D(te^\theta, 0) d\theta \right) d(tM'_-(t)) \right) < +\infty, \quad (4.3g)$$

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{D(a)}^d} \left(\sum_k g_D(\lambda_k, 0) - \int_0^{1^-} M(t) d\omega_D^{\text{rad}}(t) \right) < +\infty, \quad (4.3h)$$

то Λ — последовательность нулей для для пространства

$$\text{Hol}(\mathbb{D}; M + Cb_M^{[6]}), \quad C \text{ — постоянная}, \quad (4.4)$$

с радиальной функцией

$$b_M^{[6]}(r) := \frac{6}{1-r} \int_{(r-6(1-r))^+}^{1^-} (1-t) dM(t); \quad (4.5)$$

(U_r) если Λ — подпоследовательность нулей для $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, то Λ — последовательность нулей для пространства (4.4);

(M_r) если $f = g/q$ — мероморфная функция на \mathbb{D} , $g, q \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, и существует постоянная $a < 1$ такая, что

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{D(a)}^d} \left(\int_{\mathbb{D}} \log \max\{|g(z)|, |q(z)|\} d\omega_D(0, z) - \int_0^{1^-} M(t) d\omega_D^{\text{rad}}(t) \right) < +\infty \quad (4.6)$$

или же обе функции g и q принадлежат пространству $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, то найдутся функции g_0 и q_0 из пространства (4.4) без общих нулей, с которыми по-прежнему имеем представление $f = g_0/q_0$ на \mathbb{D} .

Доказательство. По условию теоремы 3 функция M — возрастающая положительная функция, выпуклая от логарифма на $(0, 1)$. Это значит, что функция $M(z) = M(|z|)$ непрерывная и субгармоническая на \mathbb{D} . Следовательно, существует положительная левая производная M'_- от $M(t)$, $t \in (0, 1)$. Кроме того, функция $tM'_-(t)$ возрастающая на $(0, 1)$ и вычисление лапласиана от M дает представление

$$d\nu_M(z) = \frac{1}{2\pi} d\theta \otimes d(tM'_-(t)), \quad z := te^{i\theta}, \quad 0 \leq t < 1, \quad (4.7)$$

для плотности меры Рисса ν_M (в смысле теории распределений) субгармонической функции M . При этом ввиду радиальности функции M

$$\int_{\mathbb{D}} M(z) d\omega_D(0, z) = \int_0^{1^-} M(t) d\omega_D^{\text{rad}}(t), \quad (4.8)$$

а (4.2) в силу возрастания M дает соотношение $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)M(t) = 0$ и после интегрирования по частям обеспечивает сходимость интеграла

$$\int_0^{1^-} (1-t) dM(t) < +\infty. \quad (4.9)$$

Отсюда

$$\int_r^{1^-} (1-t) dM(t) = \int_r^{1^-} (1-t)M'_-(t) dt \quad (4.10i)$$

$$\geq rM'_-(r) \int_r^{1^-} \frac{1-t}{t} dt \geq rM'_-(r) \frac{1}{r} \frac{1}{2} (1-r)^2 = \frac{1}{2} M'_-(r)(1-r)^2, \quad (4.10r)$$

откуда ввиду условия (4.9)

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} M'_-(r)(1-r)^2 = 0. \quad (4.11)$$

Для определяющего пространство (3.5) в теореме 2 второго слагаемого (3.2) при $z = re^{i\theta}$, $6/7 \leq r < 1$, в нашем случае ввиду радиальности функции M имеем

$$\begin{aligned} b_M^{[6]}(z) &= b_M^{[6]}(r) \\ &\stackrel{(3.1), (4.7)}{=} \frac{1}{(1-r)^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\arcsin 6(1-r)}^{\arcsin 6(1-r)} \left(\int_{r-6(1-r)}^{1^-} (1-t)^2 d(tM'_-(t)) \right) d\theta \\ &\leq \frac{3}{1-r} \int_{r-6(1-r)}^{1^-} (1-t)^2 d(tM'_-(t)). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что интегрирование по частям с учетом (4.11) и положительности функции $tM'_-(t)$ дает как оценку

$$\begin{aligned} b_M^{[6]}(z) &\leq \frac{6}{1-r} \int_{r-6(1-r)}^{1^-} tM'_-(t)(1-t) dt \\ &\quad \frac{6}{1-r} \int_{r-6(1-r)}^{1^-} M'_-(t)(1-t) dt \stackrel{(4.10i)}{=} \frac{6}{1-r} \int_{r-6(1-r)}^{1^-} (1-t) dM(t), \end{aligned}$$

позволяющую переопределить функций $b_M^{[6]}$ соотношением (4.5), так и выполнение условия (3.4) теоремы 2.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Функция M возрастающая и радиальная. Следовательно,

$$A_M^{[\varepsilon]}(z) \leq M(r + \varepsilon(1 - r)), \quad r = |z|. \quad (4.12)$$

По теореме о среднем значении найдется точка r_ε такая, что $r \leq r_\varepsilon \leq r + \varepsilon(1 - r)$ и

$$\begin{aligned} M(r + \varepsilon(1 - r)) - M(r) &\leq M'_-(r_\varepsilon) \cdot \varepsilon(1 - r) = M'_-(r_\varepsilon)(1 - r_\varepsilon) \cdot \varepsilon \frac{1 - r}{1 - r_\varepsilon} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} M'_-(r_\varepsilon)(1 - r_\varepsilon) \stackrel{(4.10)}{\leq} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{2}{1 - r_\varepsilon} \int_{r_\varepsilon}^{1-} (1 - t) dM(t) \\ &\stackrel{(4.9)}{\leq} \frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{1}{1 - r} \int_r^{1-} (1 - t) dM(t). \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (4.12), в рассматриваемом случае

$$\text{Hol}(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_M^{[6]}) = \text{Hol}(\mathbb{D}; M + C_\varepsilon b_M^{[6]}),$$

где функция $b_M^{[6]}$ имеет вид (4.5), а C_ε — постоянная, зависящая только от ε . Следовательно, теорема 3 — специальный случай теоремы 2. •

Замечание 1. Вообще говоря, в теореме 3 нет необходимости требовать от положительной возрастающей функции M выпуклости от логарифма на всем интервале $(0, 1)$, а достаточно предполагать ее таковой на интервале $[d, 1)$ где $0 < d < 1$ — произвольное число. Если преобразовать функцию M в функцию

$$M_d(z) = \begin{cases} M(d), & \text{если } |z| < d, \\ M(z), & \text{если } d \leq |z| < 1, \end{cases}$$

которая уже будет субгармонической с плотность меры Рисса, равной (4.7) при $d < |z| < 1$ и с дополнительной плотностью $\frac{1}{2\pi} M'_+(d) d\theta$, сосредоточенной на окружности $\partial D(d)$, где M'_+ — правая производная по радиусу. Теорема 3 при этом остается в силе.

Напомним [8, определение 5], что мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ с компактным носителем в круге \mathbb{D} называется *мерой Аренса–Зингера* (на \mathbb{D} для точки 0), если

$$h(0) = \int_{\mathbb{D}} h d\mu$$

для всех гармонических в \mathbb{D} функций h . Через $\mathcal{AS}(\mathbb{D})$ обозначаем класс всех мер Аренса–Зингера.

Примерами мер Аренса–Зингера для $0 \in \mathbb{D}$ могут служить все гармонические меры $\omega_D(0, \cdot)$ относительно областей $D \in \mathbb{D}$ в точке $0 \in D$.

Субгармоническую в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцию V называем *потенциалом Аренса–Зингера* (на \mathbb{D} с полюсом в точке 0) [8, определение 6], если она удовлетворяет двум условиям:

- (1) $V \equiv 0$ на $\mathbb{C} \setminus (K \cup \{0\})$ для некоторого $K \in \mathbb{D}$ (финитность V);
- (2) $\limsup_{\zeta \rightarrow 0} \frac{V(\zeta)}{-\log |\zeta|} \leq 1$ (нормировка в нуле для V).

Класс всех таких потенциалов Аренса–Зингера обозначаем через $\mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})$.

Примерами потенциалов Аренса–Зингера могут служить все продолженные функции Грина $g_D(\cdot, 0)$ для областей $D \in \mathbb{D}$ с полюсом в точке 0.

При очень простом условии на радиальный вес M теорема 3 ниже приобретает форму критерия:

Теорема 4. Пусть радиальная функция M такая же, как в теореме 3, равно как и последовательность $\Lambda \not\equiv 0$, и функция $f_\Lambda \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ с $\text{Zero}_\Lambda = \Lambda$. Тогда при дополнительном условии

$$\int_r^{1^-} (1-t) dM(t) = O(1-r) \quad \text{при } r \rightarrow 1^-, \quad t, r \geq 0, \quad (4.13)$$

справедливы следующие утверждения:

(Z_r^0) любое из трех условий (4.3) эквивалентно каждому из соотношений

$$\sup_{\mu \in \mathcal{AS}(\mathbb{D})} \left(\int_{\mathbb{D}} \log |f_\Lambda(z)| d\mu(z) - \int_0^{1^-} M(t) d\mu^{\text{rad}}(t) \right) < +\infty, \quad (4.14f)$$

$$\sup_{V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int_0^{1^-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(te^\theta) d\theta \right) d(tM'_-(t)) \right) < +\infty, \quad (4.14g)$$

$$\sup_{V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int_{0^+}^{1^-} M(t) d\mu_V^{\text{rad}}(t) \right) < +\infty, \quad (4.14h)$$

где $\mu_V \in \mathcal{AS}(\mathbb{D})$ — мера Рисса функции Аренса–Зингера V , но самое главное эквивалентно тому, что Λ — последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$;

(U_r^0) Λ — подпоследовательность нулей для $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, если и только если Λ — последовательность нулей для того же $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$;

(M_r^0) если f — мероморфная функция на \mathbb{D} , то следующие четыре утверждения попарно эквивалентны:

(а) для некоторого представления $f = g/q$ с функциями $g, q \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ справедливо соотношение

$$\sup_{\mu \in \mathcal{AS}(\mathbb{D})} \left(\int_{\mathbb{D}} \log \max\{|g(z)|, |q(z)|\} d\mu(z) - \int_0^{1^-} M(t) d\mu^{\text{rad}}(t) \right) < +\infty, \quad (4.15)$$

(б) при некотором представлении $f = g/q$ с функциями $g, q \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ существует постоянная $a < 1$, для которой выполнено (4.6),

- (с) существует представление $f = g/q$ с функциями $g, q \in \text{Hol}(\mathbb{D}; M)$,
- (d) найдутся функции $g_0, q_0 \in \text{Hol}(\mathbb{D}; M)$ без общих нулей, с которыми имеет место представление $f = g_0/q_0$ на \mathbb{D} .

Доказательство. Эквивалентность трех условий (4.3) — следствия классической формулы Пуассона–Йенсена и вида (4.7) меры Рисса ν_M . Эквивалентность трех условий (4.14) — аналогичное следствие обобщения формулы Пуассона–Йенсена для потенциалов и мер Аренса–Зингера [17, Предложение 1.2]. Кроме того, три условия (4.3) — частный случай соответственно трех условий (4.14), поскольку функции Грина и меры Йенсена — специальные виды соответственно потенциалов и мер Аренса–Зингера и Йенсена. По теореме 3, п. (Z_r) , любое из трех условий (4.3) влечет за собой то, что Λ — последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\mathbb{D}; M + Cb_M^{[6]})$ из (4.4), где для радиальной функции $b_M^{[6]}$ из (4.5) имеем

$$b_M^{[6]}(r) := 6 \frac{1 - (r - 6(1 - r))^+}{1 - r} \frac{1}{1 - (r - 6(1 - r))^+} \int_{(r - 6(1 - r))^+}^{1^-} (1 - t) dM(t),$$

что, согласно условию (4.13), при $r < 1$, достаточно близких к 1, для некоторой постоянной C выполнена оценка

$$b_M^{[6]}(r) \leq 6 \frac{7(1 - r)}{1 - r} C = 42C. \tag{4.16}$$

Таким образом, пространство $\text{Hol}(\mathbb{D}; M + Cb_M^{[6]})$ в данном случае — это $\text{Hol}(\mathbb{D}; M + 42C) = \text{Hol}(\mathbb{D}; M)$.

Наконец, если Λ — последовательность нулей для $\text{Hol}(\mathbb{D}; M)$, то, как показано в [8, теорема 1, п. (zn1)], выполнено (4.14f).

Утверждение (Z_r^0) доказано.

Утверждение (U_r^0) ввиду (4.16) — прямое следствие п. (U_r) теоремы 3.

Докажем последний п. (M_r^0) . Импликация (а) \implies (b) очевидна, так как гармонические меры — это меры Аренса–Зингера. Из (b) по теореме 3, п. (M_r) , ввиду (4.16) следует (d). Импликации (d) \implies (с) \implies (а) очевидны. •

§ 5. Примеры: слабые аналоги условий Коренблюма–Сейпа

Напомним сначала замечательные по своей определенной завершенности результаты Б. Коренблюма [18], а затем К. Сейпа [19]–[21], о распределении

нулей в пространствах (здесь $\gamma \geq 0$, $\alpha > 0$, $z \in \mathbb{D}$; $\log^\gamma x := (\log x)^\gamma$)

$$K(\gamma, \alpha) \stackrel{[21]}{:=} \text{Hol}(\mathbb{D}, \alpha M_\gamma), \quad M_\gamma: z \mapsto \log^\gamma \frac{1}{1-|z|}, \quad (5.1K)$$

$$A^{-\alpha} := K(1, \alpha), \quad A^{-\infty} := \bigcup_{\alpha > 0} A^{-\alpha} \stackrel{(1.11)}{=} \text{Alg}_{M_1}^\infty(\mathbb{D}) \quad (5.1A)$$

$$A_+^{-\alpha} \stackrel{[13]}{:=} \bigcap_{\alpha' > \alpha} A^{-\alpha'}, \quad A_-^{-\alpha} \stackrel{[13]}{:=} \bigcup_{\alpha' < \alpha} A^{-\alpha'}. \quad (5.1\alpha)$$

Б. Коренблум ввел в работе [18] понятие плотности, в некотором смысле обобщающее классическое условие Бляшке, и нашел полное геометрическое описание последовательностей нулей для алгебры $A^{-\infty}$. Е. Беллер [11, п. 2, следствие 1] доказал, что для любого $\alpha > 0$, класс последовательностей нулей для $A^{-\alpha}$ совпадает с классом подпоследовательностей нулей для $A^{-\alpha}$. Д. Паскуас [22], а также Х. Бруна и Х. Массанеда [23] обобщили результат Б. Коренблума на весовые алгебры $\text{Alg}_M^\infty(\mathbb{D})$ и даже на алгебры функций многих комплексных переменных в единичном шаре, когда $M > 0$ — радиальная весовая функция, “слабо возрастающая” в том смысле [23, п. III.1], что выполнены три условия

- (a) $\lim_{r \rightarrow 1^-} M(r) = +\infty$;
- (b) функция $r \mapsto (1-r)M(r)$ — убывающая на $[0, 1)$;
- (c) $\sup_{r \in [0,1)} \frac{M(1-r^2)}{M(1-r)} < +\infty$.

В обозначении $f^{on} := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}$, $n \in \mathbb{N}$, для n -кратной композиции функции f примерами слабо возрастающих радиальных весов на $[0, 1)$, выпуклых относительно \log , могут служить функции

- (i) $M: r \mapsto \log^\gamma \frac{e}{1-r}$, $\gamma > 0$, $r \in [0, 1)$,
- (ii) $M: r \mapsto \log^{on} \left(\frac{A}{1-r} \right)$, $n \in \mathbb{N}$, $A \geq \exp^{on}(1)$, $r \in [0, 1)$,

но в силу условия (c) не подходят выпуклые относительно \log функции-мажоранты

$$M: r \mapsto \frac{1}{(1-r)^\beta}, \quad r \in [0, 1), \quad (5.2)$$

каково бы не было значение числа $\beta \in (0, 1)$, хотя эти весовые функции и удовлетворяют условиям (a)–(b).

В [19]–[20] К. Сейп значительно усовершенствовал метод Б. Коренблума и получил подобное полное описание последовательностей нулей для пространств $A_+^{-\alpha}$ и $A_-^{-\alpha}$ и даже несколько более сильные результаты. В совместной монографии Х. Хеденмальма, Б. Коренблума и К. Жу [13, гл. 4] содержатся детальный анализ и доказательства этих результатов К. Сейпа вместе с их усовершенствованными интерпретациями. Наконец, в [21] К. Сейпом

дано законченное геометрическое описание последовательностей нулей для пространств $K(\gamma, \alpha)$ при значении $\gamma < 1$.

В целях дальнейших аналогий остановимся здесь на основных результатах К. Сейпа подробнее.

Пусть F — конечное множество на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$, I_j — множество дополнительных к F дуг на $\partial\mathbb{D}$, $|I_j|$ — длина дуги I_j . Положим

$$\widehat{\kappa}(F; \gamma) := \sum_j \frac{|I_j|}{2\pi} \log^\gamma \frac{2\pi}{|I_j|} \quad (5.3)$$

— γ -характеристика Берлинга–Карлесона множества F [13, п. 4.2].

Нормированное угловое расстояние на $\partial\mathbb{D}$ определяется как $d(e^{it}, e^{is}) := |t - s|/\pi$, где предполагается, что $|t - s| \leq \pi$. Для конечного подмножества $F \subset \partial\mathbb{D}$ определяется подмножество единичного круга

$$G_F := \{z \in \overline{\mathbb{D}} : 1 - |z| \geq d(z/|z|, F)\}. \quad (5.4)$$

Объединением результатов из [19, теорема], [20, теорема 1], [21, теорема 1], [13, теорема 4.15, следствие 4.16] является

Теорема S. *Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\} \in \mathbb{D}$ является последовательностью нулей*

(s0) *для пространства $K(\gamma, \alpha)$ с $0 \leq \gamma < 1$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_F \left(\sum_{\lambda_k \in G_F} (1 - |\lambda_k|) - \alpha \widehat{\kappa}(F; \gamma) \right) < +\infty, \quad (5.5)$$

где супремум берется по всем конечным подмножествам $F \subset \partial\mathbb{D}$;

(s1) *для пространства $A_+^{-\alpha}$ (соответственно $A_-^{-\alpha}$), если и только если*

$$\limsup_{\widehat{\kappa}(F; 1) \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\lambda_k \in G_F} (1 - |\lambda_k|)}{\widehat{\kappa}(F; 1)} \leq \alpha \quad (\text{соответственно } < \alpha). \quad (5.6)$$

Кроме того, при $\gamma > 1$ справедливо равенство²

$$\inf \left\{ \alpha > 0 : \sup_{F \subset \partial\mathbb{D} - \text{конечное}} \left(\sum_{\lambda_k \in G_F} (1 - |\lambda_k|) - \alpha \widehat{\kappa}(F; \gamma) \right) < +\infty \right\} \\ = \inf \left\{ \alpha > 0 : \Lambda - \text{последовательность нулей для } K(\gamma, \alpha) \right\}. \quad (5.7)$$

Последнее равенство (5.7) теоремы S отмечено в [21, замечание 2].

Функции $M_\gamma(r)$ из (5.1К) и функции из (i) и (ii) выше, а также из (5.2) выпуклы относительно \log на $[0, 1)$ при любом $A \geq \exp^{o(n-1)}(1)$. Для этих функций при любых значениях $0 \leq \gamma \leq 1$ и только при них, а также при

²По определению $\inf \emptyset = +\infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$.

любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие (4.13) теоремы 4. По аналогии с характеристикой Берлинга–Карлесона (5.3) конечных множеств на $\partial\mathbb{D}$ для каждой функции Аренса–Зингера $V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})$ и весовой радиальной и выпуклой относительно \log на $[0, 1)$ функции M введем обобщенную характеристику Берлинга–Карлесона функции V относительно веса M , которую в свете результатов Б. Коренблюма и К. Сейпа представляется уместным определить по правилу (см. (4.7), (4.3g) и (4.14g))

$$\widehat{\kappa}(V; M) := \int_0^{1-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(te^{i\theta}) d\theta \right) d(tM_-(t)). \quad (5.8)$$

Так, γ -характеристика Берлинга–Карлесона конечного подмножества F на $\partial\mathbb{D}$ из (5.3) близка к обобщенной характеристике Берлинга–Карлесона продолженной функции Грина $g_{G_F}(\cdot, 0)$ с полюсом в нуле относительно функции M_γ из (5.1К), т. е. из (i), что в данном случае одно и то же.

Если при $M = M_1: r \mapsto \log \frac{1}{1-r}$ для краткости положить $\widehat{\kappa}(V) := \widehat{\kappa}(V; M)$, то из теоремы 4 сразу получаем критериальное развитие части (s1) с $\gamma = 1$ теоремы Сейпа S, но со значительно большим объемом тестовых проверок:

Теорема 5. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{D}$, $k = 1, 2, \dots$, $0 \notin \Lambda$, и $0 \leq \alpha < +\infty$. Тогда следующие три утверждения попарно эквивалентны:

- [Z] последовательность Λ — последовательность нулей для $A^{-\alpha}$;
- [G] $\sup_{D \in \mathcal{U}_{D(a)}^d} \left(\sum_k g_D(\lambda_k, 0) - \alpha \widehat{\kappa}(g_D(\cdot, 0)) \right) < \infty$ для некоторого $a < 1$;
- [AS] $\sup_{V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \alpha \widehat{\kappa}(V) \right) < \infty$.

С целью избежать длинных формулировок следствий из теорем 3 и (или) 4, подобных теореме 5, для явных радиальных весовых функций M вида (i), (ii), (5.2) и им подобных ограничимся здесь таблицей. Из нее легко видеть, чем ограничена сверху дополнительная функция $b_M^{[6]}$ из (4.5) в левой окрестности 1 для различных явных весов M , удовлетворяющих условиям теоремы 3.

№ ссылки	Вес M	Оценка на $b_M^{[6]}(r)$
(5.1К) или (i)	$M(r) = M_\gamma(r) \equiv \log^\gamma \frac{1}{1-r}$	$\leq 43\gamma \log^{(\gamma-1)^+} \frac{1}{1-r}$
(ii)	$M(r) \equiv \log^{on} \left(\frac{A}{1-r} \right)$, $A \geq \exp^{on}(1)$	≤ 1
(5.2)	$M(r) \equiv \frac{1}{(1-r)^\beta}$, $0 < \beta < 1$	$\leq \frac{42}{1-\beta} \frac{1}{(1-r)^\beta}$

§ 6. Вариант условий Льюкинга

Одна из версий подхода к описанию последовательностей нулей в пространствах Бергмана и некоторых их обобщений [13], включая пространства

$A^{-\alpha}$, была предложена Д. Льюкингом в работе [24]. В 1996 г. он дал критерий нулевой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{D}$, в частности, и для пространства $A^{-\alpha}$ в терминах существования гармонической миноранты для специальной тестовой функции, построенной по последовательности Λ . Этот подход для “слабо возрастающих весов” получил развитие в совместной статье О. Бласко, А. Кукурики и М. Новак [25], электронный вариант которой вышел еще в 2002 г. Мы даем вариант этих результатов только для пространств $A^{-\alpha}$ без использования гипотетической гармонической миноранты.

Теорема 6. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{D}$, $k = 1, 2, \dots$, $0 \notin \Lambda$ и $0 \leq \alpha < +\infty$. Тогда следующие три утверждения попарно эквивалентны:

[ZL] последовательность Λ — последовательность нулей для $A^{-\alpha}$;

[GL] существует постоянная $a < 1$, при которой

$$\sup_{D \in \mathcal{U}_{D(a)}^d} \left(\sum_k (1 - |\lambda_k|^2)^2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{g_D(\zeta, 0) dm(\zeta)}{|1 - \lambda_k \bar{\zeta}|^4} \right) - \alpha \widehat{\kappa}(g_D(\cdot, 0)) \right) < \infty;$$

[ASL] $\sup_{V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})} \left(\sum_k (1 - |\lambda_k|^2)^2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{V(\zeta) dm(\zeta)}{|1 - \lambda_k \bar{\zeta}|^4} \right) - \alpha \widehat{\kappa}(V) \right) < \infty.$

Набросок доказательства. Очевидное включение класса всех продолженных функций Грина $g_D(\cdot, 0)$, $D \in \mathbb{D}$, в класс потенциалов Аренса–Зингера $\mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})$ дает импликацию [ASL] \implies [GL].

Следуя Д. Льюкингу, положим

$$K_{\Lambda}(z) = \frac{|z|^2}{2} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \frac{(1 - |\lambda_k|^2)^2}{|1 - \lambda_k \bar{z}|^2}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (6.1)$$

Здесь K_{Λ} — субгармоническая непрерывная функция на \mathbb{D} и вычисления дают

$$\begin{aligned} \Delta K_{\Lambda}(z) &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} K_{\Lambda}(z) \\ &= 2 \sum_k (1 - |\lambda_k|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \frac{z \bar{z}}{(1 - \lambda_k \bar{z})(1 - \bar{\lambda}_k z)} \\ &= 2 \sum_k (1 - |\lambda_k|^2)^2 \frac{1}{|1 - \lambda_k \bar{z}|^4}. \end{aligned}$$

Отсюда для меры Рисса $\nu_{K_{\Lambda}}$ субгармонической функции K_{Λ} имеем

$$d\nu_{K_{\Lambda}}(z) = \frac{1}{\pi} \sum_k \frac{(1 - |\lambda_k|^2)^2}{|1 - \lambda_k \bar{z}|^4} dm(z), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (6.2)$$

Теорема L ([24, теорема A, (b)]). Последовательность Λ — последовательность нулей для $A^{-\alpha}$, если и только если для $M_1(t) \equiv \log \frac{1}{1-t}$ из (5.1K) с $\gamma = 1$ функция $M_1 - K_{\Lambda}$ допускает гармоническую миноранту.

Из этой теоремы Д. Льюкинга и работы [8, предложение 3.6] легко следует импликация $[ZL] \implies [ASL]$.

Для доказательства оставшейся импликации $[GL] \implies [ZL]$ нам придется вернуться к главному результату нашей работы [8, § 2, п. 2.2, основная теорема]. В данном случае условие $[GL]$ есть ни что иное, как частный случай пункта (h1) указанной основной теоремы из [8], но с функцией K_Λ вместо функции u и соответственно мерой Рисса (6.2), а также с функцией M_1 вместо M с мерой Рисса, определенной по правилу

$$d\nu_{M_1}(z) = \frac{1}{2\pi} d\theta \otimes \frac{dt}{(1-t)^2}, \quad z = te^{i\theta} \in \mathbb{D}, \quad 0 \leq r < 1. \quad (6.3)$$

При этом заключение основной теоремы из [8] с учетом [8, п. 1.3, замечание 1] утверждает, что при условии (h1) функция $M + Q - u$ с функцией $Q := Q_k^\nu$ (см. (1.10)) из формулировки теоремы А, которая в данном случае совпадает с $M_1 + Q - K_\Lambda$, допускает гармоническую миноранту. В нашем конкретном случае $\nu = \nu_{M_1}$, а субгармоническое ядро k — это ядро Бомаша \bar{b}_2 . Но вся основная аналитическая деятельность в § 3 заключалась именно в оценке сверху функции $Q(z)$ величиной

$$A_M^{[\varepsilon]}(z) - M(z) + C_\varepsilon b_M^{[4]}(z)$$

(см. (3.30)), где функция $b_M^{[4]}$ определена в (3.2) и $M = M_1$. В нашем случае из конкретного вида функции M_1 и второй строки таблицы в конце § 5 для $\gamma = 1$ получаем ограниченность сверху функции Q всюду в \mathbb{D} . Следовательно, функция $M_1 - K_\Lambda$ допускает гармоническую миноранту на \mathbb{D} . По теореме L это и означает выполнение $[ZL]$. •

Замечание 2. Слагаемые в первых суммах из $[GL]$ и $[ASL]$ — это значения в точках λ_k преобразования Березина (см. [13, Ch. 2]) соответственно функций Грина и потенциалов Аренса–Зингера.

Замечание 3. В теоремах 5, 6 в пп. $[G]$ и $[GL]$ мы можем допускать, что области $D \subset \mathbb{D}$, построенные как конечные объединения кругов, имеют конечное число общих точек с окружностью $\partial\mathbb{D}$, так как интегралы (5.8) при $M = M_1$ с подынтегральным выражением $V = g_D(\cdot, 0)$ в таком случае конечны. Кроме того, во всех формулировках теорем система областей $U_{D(a)}^d$ может быть заменена на произвольную *регулярную оптимально исчерпывающую систему областей* в \mathbb{D} с *любым центром* $S_0 \in \mathbb{D}$ в смысле [8, определение 1].

Дальнейшими целями видятся иллюстрации возможностей метода выметания из [8] в комбинации с результатами статьей [26] и [27] для достаточно простых алгебр функций $\text{Alg}_M^\infty(\mathbb{D})$ в предположении положительности и радиальности M на \mathbb{D} . Это направление можно рассматривать как некоторую вариацию на тему части статьи Ф. А. Шамояна [28, теорема 2.2]. Последующие этапы исследований предполагают также прямое применение результатов из [8] и [27] к функциям, голоморфным в конечносвязных областях.

Дальнейшими целями видятся попытки обобщения результатов данной статьи на основе исследования ядер Бомаша \bar{b}_p при $3 \leq p \leq 6$ в духе § 3 оказались на удивление сложными и малорезультативными — во всяком случае, в нашем исполнении. Но даже в случае $p = 3$ такое изучение представляется интересным, поскольку нам неизвестно, например, существует ли полное описание последовательностей нулей для алгебры $\text{Alg}_M^\infty(\mathbb{D})$ с функцией M из (5.2) с $\beta = 1$. А для субгармонической функции $1/(1 - |z|)$, $z \in \mathbb{D}$, именно ядро Бомаша \bar{b}_3 является подходящим.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность рецензенту и редакторам за важные и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Л. Шварц, *Анализ. Т. I*, Наука, М., 1967.
- [2] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.
- [3] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [4] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p* , Мир, М., 1984.
- [5] Хейман У., *Мероморфные функции*, Мир, М., 1966.
- [6] Tsuji M., *Potential theory in modern function theory*, Chelsea Publ. Co., N.Y., 1975.
- [7] Ransford T. J., *Potential Theory in the Complex Plane* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [8] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 121-160.
- [9] G. Bomash, “A Blaschke-type product and random zero sets for Bergman spaces”, *Arkiv für Math.*, **30** (1992), 45–60.
- [10] E. Beller, C. Horowitz, “Zero sets and random zero sets in certain function spaces”, *J. Analyse Math.*, **64** (1994), 203–217.
- [11] E. Beller, “Factorization for non-Nevanlinna classes of analytic functions”, *Israel J. Math.*, **27**:3–4 (1977), 320–330.
- [12] A. Borichev, H. Hedenmalm, “Harmonic functions of maximal growth: invertibility and cyclicity in Bergman spaces”, *J. Amer. Math. Soc.*, 1997. **10**:4 (1997), 761–796.

- [13] Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K., *Theory of Bergman spaces*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 199, New York, 2000.
- [14] Yu.I. Lyubarskii, K. Seip, “A uniqueness theorem for bounded analytic functions”, *Bull. London Math. Soc.*, **29** (1997), 49–52.
- [15] И.И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [16] В.Я. Эйдерман, Маттс Эссэн, “Теоремы единственности для аналитических и субгармонических функций”, *Алгебра и анализ*, **14**:6 (2002), 1–88.
- [17] Б.Н. Хабибуллин, “Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций”, *Сиб. матем. ж.*, **4**:4 (2003), 905–925.
- [18] B. Korenblum, “An extension of the Nevanlinna theory”, *Acta Math.*, **135** (1975), 187–219.
- [19] K. Seip, “On a theorem of Korenblum” *Ark. Math.*, **32** (1994), 237–243.
- [20] K. Seip, “On Korenblum’s density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$ ”, *J. Analyse Math.*, **67** (1995), 307–322.
- [21] K. Seip, “An extension of the Blaschke condition”, *J. London Math. Soc.*, **51** (1995), 545–558.
- [22] D. Pascuas, *Zeros interpolació en espais de funcions holomorfes del disc unitat*, Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 1988.
- [23] J. Bruna, X. Massaneda, “Zero sets of holomorphic functions in the unit ball with slow growth”, *J. Analyse Math.*, **66** (1995), 217–252.
- [24] D. Luecking, “Zero sequences for Bergman spaces”, *Complex Variables*, **30** (1996), 345–362.
- [25] O. Blasco, A. Kukuryka, M. Nowak, “Luecking’s condition for zeros of analytic functions”, *ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA*, Lublin – Polonia, **LVIII**:A (2004), 1–15.
- [26] Л.Ю. Чередникова, “Последовательности неединственности для весовых алгебр голоморфных функций в единичном круге”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 775–787.
- [27] Б.Н. Хабибуллин, Ф.Б. Хабибуллин, Л.Ю. Чередникова “Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II”, *Алгебра и анализ*, **20**:1 (2008), 190–236.
- [28] Ф.А. Шамоян “Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста”, *Изв. АН Арм. ССР. Математика*, **XIII**:5–6 (1978), 405–422.

ФГОУ ВПО Башкирский государственный аграрный университет
450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, д. 34
Кудашева Елена Геннадьевна
E-mail: lena_kudasheva@mail.ru

ГОУ ВПО Башкирский государственный университет
450074, Уфа, ул. Фрунзе, 32
Хабибуллин Булат Нурмиевич
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112
Хабибуллин Булат Нурмиевич
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru
Web-site: <http://math.bsunet.ru/khb>