УДК 517.547 + 517.538 + 517.574

Е. Г. Кудашева, Б. Н. Хабибуллин*

Распределение нулей голомофных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а H — некоторый класс голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, выделяемых ограничением на их рост вблизи границы круга посредством весовых функций умеренного роста. Получен ряд результатов об описании последовательностей нулей для голоморфных функций из таких классов H. Весовые функции, определяющие класс H не обязательно радиальные. В то же время и для радиальных ограничений результаты являются новыми. $\|x\|$
Рассмотрены условия на мероморфные в $\mathbb{D}$ функций, при которых они могут быть представлены в виде отношения двух функций из H без общих нулей.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: единичный круг, голоморфная функция, последовательность нулей, весовое пространство, представление мероморфной функции, субгармоническая функция, функция Грина

§ 1. Введение. Описание общей схемы

Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно[1] всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел или их геометрические интерпретации. Следуя Л. Шварцу [1], положительность числа, функции, меры и т. д. понимаем всюду как $\geqslant 0$, а > 0 — это строгая положительность. Аналогичное соглашение принимается для отрицательности и строгой отрицательности. Функция $f(t)$, определенная на интервале (ограниченном или неограниченном) вещественной оси, называется возрастающей (соответственно строго возрастающей), если при всех $t_1 < t_2$ из области определения выполнено неравенство $f(t_1) \leqslant f(t_2)$ (соответственно строгое неравенство $f(t_1) < f(t_2)$). Подобным же образом различаем убывание и строгое убывание.

Для $a \in \mathbb{R}$ через $[a]$ обозначаем целую часть числа a, $a^+ := \max\{a, 0\}$ — его положительная часть, $\log^+ a := (\log a)^+$ при $a > 0$.

---

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 09-01-00046_а и 08-01-97023-р_поволжье_а, а также программы господдержки ведущих научных школ РФ, проект НШ–3081.2008.1.

[1]Далее сокращение «соответственно» используется для предлога «соответственно».

Для подмножеств $A, B \subset \mathbb{C}$ пишем $A \Subset B$, если замыкание $\overline{A}$ множества A — компакт в B в топологии, индуцированной с $\mathbb{C}$; ∂A — граница множества A в $\mathbb{C}$.

Как всегда, $C(S)$ — пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на множестве $S \subset \mathbb{C}$. Через $\mathcal{M}(S)$ обозначаем множество всех вещественных борелевских мер (мер Радона) на борелевском множестве S (на $C(S)$); $\mathcal{M}^+(S)$ — подконус в $\mathcal{M}(S)$, состоящий из положительных борелевских мер; $\mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(S)$ — подкласс $\mathcal{M}^+(S)$, состоящий из мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега m. Сужение меры $\mu \in \mathcal{M}(S)$ на его борелевское подмножество B обозначаем как $\mu\big|_B$. Интегралы от функций со значениями в $[-\infty, +\infty]$ по положительной мере ν понимаются в широком смысле, т. е. могут принимать значения из $[-\infty, +\infty]$, как в [2], но функция интегрируема по мере ν, если интеграл от нее по мере ν конечен. Класс всех локально интегрируемых по m функций на области $\Omega \subset \mathbb{C}$ обозначаем через $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

По поводу голоморфных, мероморфных и субгармонических функций в статье используются близкие к стандартным обозначения, терминология, а также широко известные факты из монографий [2]–[7]. Последовательности точек в области или на плоскости, а также отношения и обозначения, связанные с ними, понимаются так же, как в [8].

Предварительно сформулируем одни из основных результатов статьи [8] о последовательностях нулей для весовых пространствах голоморфных функций и о представлении мероморфных функций в существенно упрощенной, но все еще достаточно общей форме. На них в основном и будут опираться исследования настоящей статьи.

Для $z \in \mathbb{C}$ и $r \geqslant 0$ через $D(z, r) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$ *открытый круг* радиуса r с центром в точке $z \in \mathbb{C}$. При этом $D(r) := D(0, r)$, $\mathbb{D} := D(1)$. Для произвольной меры ν на $\mathbb{C}$ при $t > 0$ полагаем

$$\nu(z, t) := \nu\big(D(z, t)\big), \quad \nu^{\mathrm{rad}}(t) := \nu(0, t) \tag{1.1}$$

при условии определенности правых частей. Но *в связи с принятыми в* [8] *соглашениями* нам удобно считать, что $\nu(z, 0) := \nu\big(\{z\}\big)$.

Пусть $\Omega \ni 0$ — односвязная в $\mathbb{C}$ область или такая, что $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega} \neq \varnothing$, а M — субгармоническая функция на Ω с мерой Рисса $\nu_M = \frac{1}{2\pi}\Delta M$, $\nu := \nu_M \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, где оператор Лапласа Δ действует в смысле теории обобщенных функций, или распределений. Тогда для M имеет место глобальное представление Рисса [8, Предложение 2.1]

$$M(z) \equiv \int_{\Omega} k(z, \zeta)\, d\nu(\zeta) + H(z), \quad z \in \Omega, \tag{1.2}$$

где H — гармоническая в Ω функция, если k — некоторое *субгармоническое ядро, подходящее для меры* ν, или функции M. Здесь мы не будем приводить определений, связанных с общим понятием субгармонического ядра (см. [8, Определения 2–4]), а отметим лишь простейшие ситуации для области Ω и конкретизируем случай $\Omega = \mathbb{D}$ (см. [8, 2.1, Примеры 0)–2)]).

Функция $(\zeta, z) \longmapsto \log|\zeta - z|$ — подходящее субгармоническое ядро на $\Omega\times\Omega$ для всякой меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ с компактным носителем в Ω, а в случае $\Omega \Subset \mathbb{C}$ и для произвольной конечной меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ на Ω, т. е. удовлетворяющей ограничению $\nu(\Omega) < +\infty$. Если для области Ω существует функция Грина g_Ω, или, что эквивалентно, граница $\partial\Omega$ — неполярное множество), то функции

$$(\zeta, z) \longmapsto -g_\Omega(\zeta, z) \quad \text{и} \quad (\zeta, z) \longmapsto -g_\Omega(\zeta, z) + \log|\zeta| \tag{1.3}$$

— субгармонические ядра соответственно на $\Omega \times \Omega$ и на $(\Omega \setminus \{0\}) \times \Omega$. Эти ядра подходящие для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ при условии (см. [7, теорема 4.5.4])

$$\int_\Omega g_\Omega(\zeta, 0)\, d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Пусть $\Omega = \mathbb{D}$. Будут использоваться один из вариантов множителя Бляшке и псевдогиперболическое расстояние для $\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
B_\zeta(z) &:= \frac{|\zeta|}{\zeta}\,\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\},\ z \in \mathbb{D}, \ \text{ но } |B_0(z)| := |z|,\\
\overline{B}_\zeta(z) &:= \frac{\bar{\zeta}(\zeta - z)}{1 - \bar{\zeta}z} = |\zeta|\, B_\zeta(z), \quad \zeta \in \mathbb{D},\ z \in \mathbb{D},\\
\rho(\zeta, z) &:= \left|\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z}\right| = \bigl|B_\zeta(z)\bigr| = \frac{1}{|\zeta|}\,\bigl|\overline{B}_\zeta(z)\bigr|, \quad \zeta \in \mathbb{D},\ z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Субгармоническое *ядро Бляшке* на $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ — функция

$$(\zeta, z) \longmapsto b_1(\zeta, z) := \log|B_\zeta(z)| = \log\rho(\zeta, z) = -g_{\mathbb{D}}(\zeta, z), \quad (\zeta, z) \in \mathbb{D}\times\mathbb{D}.$$

Оно подходящее для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{1^-} (1 - t)\, d\nu^{\mathrm{rad}}(t) < +\infty. \tag{1.4}$$

Аналогично,

$$(\mathbb{D}\setminus\{0\}) \times \mathbb{D} \ni (\zeta, z) \longmapsto \bar{b}_1(\zeta, z) := \log|\overline{B}_\zeta(z)| = -g_{\mathbb{D}}(z, \zeta) + \log|\zeta|$$

— субгармоническое ядро на $(\mathbb{D}\setminus\{0\})\times\mathbb{D}$, подходящее для $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, если одновременно с (1.4) при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено условие

$$\int_0^\varepsilon \frac{\nu^{\mathrm{rad}}(t)}{t}\, dt < +\infty, \tag{1.5}$$

обеспечивающее равенство $\nu\bigl(\{0\}\bigr) = 0$.

Для $p \geqslant 1$ *ядро Бомаша* (см. [9], [10]) с несущим множеством $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ — функция

$$(\mathbb{D}\setminus\{0\})\times\mathbb{D} \ni (\zeta, z) \longmapsto \bar{b}_p(\zeta, z) := \log\bigl|1 - (1 - \overline{B}_\zeta(z))^p\bigr| = \log\left|1 - \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z}\right)^p\right|,$$

которую можно корректно определить при любых вещественных $1 \leqslant p$, выбирая соответствующую аналитическую ветвь для функции возведения в степень p. Но в данной работе используются только случаи $p = 1, 2$. Убедимся, что выражение под логарифмом модуля в правой части обращается в нуль только в точке $z = \zeta$ с кратностью 1 при $p = 1, 2, \dots 6$, но в то же время может имеет и другие нули в случае $p > 7$ (так же, как и для ядра Беллера [11, леммы 1,2]). В рамках наших определений из [8, определения 2–3] это будет означать, что ядро $\overline{b}_p(\zeta, z)$ при $p = 1, 2, \dots, 6$ *субгармоническое.*

За счет поворота круга достаточно рассмотреть случай строго положительного $\zeta = t > 0$, учитывая ограничение $t < 1$. Для $|z| < 1$ решаем (относительно z) уравнение

$$\left(\frac{1-t^2}{1-tz}\right)^p = 1\,, \text{ откуда } z = \frac{t^2 + e^{\frac{2\pi k i}{p}} - 1}{te^{\frac{2\pi k i}{p}}}\,,\ k = 0, 1, \dots, p-1. \tag{1.6}$$

При этом для решения $z \in \mathbb{D}$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{aligned} 1 > |z|^2 =& \frac{(t^2 + \cos\frac{2\pi k}{n} - 1)^2 + \sin^2\frac{2\pi k}{n}}{t^2} \\ =& \frac{t^4 + (2\cos\frac{2\pi k}{p} - 2)t^2 + (2 - 2\cos\frac{2\pi k}{p})}{t^2} \end{aligned}$$

или эквивалентного ему

$$t^4 + \Bigl(2\cos\frac{2\pi k}{p} - 3\Bigr)t^2 + \Bigl(2 - 2\cos\frac{2\pi k}{p}\Bigr) < 0. \tag{1.7}$$

Точная нижняя грань чисел t^2, при которых выполнено это условие, равна

$$1 + \Bigl(\frac{1}{2} - \cos\frac{2\pi k}{p}\Bigr) - \Bigl|\cos\frac{2\pi k}{p} - \frac{1}{2}\Bigr| > 0$$

и должна быть меньше 1. При $\cos\frac{2\pi k}{p} - \frac{1}{2} < 0$ эта грань равна 1 и требуемых решений $z \in \mathbb{D}$ при k, удовлетворяющих последнему неравенству, нет. При $\cos\frac{2\pi k}{p} - \frac{1}{2} \geqslant 0$ эта точная грань равна

$$2 - 2\cos\frac{2\pi k}{p} = 4\sin^2\frac{\pi k}{p} < 1 \iff \Bigl|\sin\frac{\pi k}{p}\Bigr| < \sin\frac{\pi}{6}\,, \tag{1.8}$$

откуда при $1 \leqslant p \leqslant 6$ следует $k = 0$ и, согласно (1.6), $z = t$ — единственное решение уравнения (1.6), а при $p \geqslant 7$ подходят еще, как минимум, и решения из (1.6) со всеми $|k| \leqslant p/6$. Использование производной показывает, что все корни уравнения (1.6) относительно z кратности 1.

Ядра Бомаша $\overline{b}_p$ — подходящие ядра для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии

$$\int_0^{1/2} \frac{\nu^{\mathrm{rad}}(t)}{t}\,dt + \int_0^{1^-} (1-t)^p\,d\nu^{\mathrm{rad}}(t) < +\infty. \tag{1.9}$$

По субгармоническому ядру k вводим функцию [8, § 1.2, (1.9)]

$$Q_k^\nu(z) := \int_\Omega \bigl(k(\zeta,0) - k(\zeta,z)\bigr)^+ \, d\nu(\zeta), \quad z \in \Omega, \tag{1.10}$$

которая принадлежит классу $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ [8, предложения 1.1–1.2].

Пусть $\mathrm{Hol}(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций f, снабженное, когда необходимо, топологией равномерной сходимости на компактах. Пусть $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ на Ω. Последовательность нулей функции f в Ω, перенумерованную с учетом кратности, обозначаем через Zero_f. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность нулей для подкласса $H \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$ (пишем $\Lambda \in \mathrm{Zero}(H)$), если найдется функция $f \in H$ такая, что $\Lambda = \mathrm{Zero}_f$ (с учетом кратности). Функция $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, если $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_f$ (пишем $f(\Lambda) = 0$). Последовательность Λ — подпоследовательность нулей для подкласса $H \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$, если существует функция $f \not\equiv 0$ на Ω из класса H, обращающаяся в нуль на Λ. Очевидно, любая последовательность нулей для класса H будет и подпоследовательностью нулей для этого же класса [8].

Функция $M\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$, называемая далее в рассматриваемом контексте *весовой, весом* или *функцией-мажорантой*, порождает весовой подпространство (весовой класс)

$$\mathrm{Hol}(\Omega; M) := \Bigl\{ f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon \sup_{z\in\Omega} \frac{|f(z)|}{\exp M(z)} < +\infty \Bigr\}.$$

Очевидно, $\mathrm{Hol}(\Omega; M) = \mathrm{Hol}(\Omega; M + C)$ для любой постоянной C.

Основным объектом нашего исследования будут определенные свойства таких пространств а также их объединений или пересечений, а именно: распределение (под)последовательностей нулей в них и возможность представления мероморфной функции в виде отношения функций именно из этих классов.

В частности, могут рассматриваться алгебры

$$\mathrm{Alg}_M^\infty(\Omega) := \Bigl\{ f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon \limsup_{z\to\partial\Omega} \frac{\log|f(z)|}{M(z)} < +\infty \Bigr\} = \bigcup_{c>0} \mathrm{Hol}(\Omega; cM) \tag{1.11}$$

с положительной на Ω функцией M.

При фиксированном подмножестве $S_0 \Subset \Omega$, содержащем 0, через $\mathcal{U}^d_{S_0}(\Omega)$ обозначаем всевозможные связные объединения $D \supset S_0$ конечного числа кругов $D(z_j, t_j) \Subset \Omega$, $j = 1, \dots, m$, исключая те области D, в дополнении $\mathbb{C} \setminus D$ которых есть изолированные точки. Это — частный случай регулярной оптимально исчерпывающей системы области Ω с центром S_0 (см. [8, определение 1, пример 1]). Если область Ω изначально однозначно определена, то полагаем $\mathcal{U}^d_{S_0}(\Omega) =: \mathcal{U}^d_{S_0}$.

Для области $D \Subset \mathbb{C}$, через $g_D(\cdot, z)$ обозначаем *продолженную функцию Грина* для D с полюсом в $z \in D$ [2, п. 5.7.4], т. е. $g_D(\zeta, z) \equiv 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и $g(\zeta, z)$ — субгармоническая функция от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$. Соответственно, $\omega_D(z, \cdot)$ — *гармоническая мера в точке z относительно области* $D \Subset \mathbb{C}$ [2, п. 5.7.1].

Пусть функция $\sigma\colon \Omega \to (0,+\infty)$ удовлетворяет ограничениям

$$0 < \sigma(z) < \operatorname{dist}(z,\partial\Omega) =: \inf\{|z-w|\colon w\in\partial\Omega\}, \quad \forall z\in\Omega. \tag{1.12}$$

Тогда для функции $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ переменное усреднение $F^{*\sigma}$ определяется через усредняющую вероятностную меру

$$m^{(\sigma(z))} := \frac{1}{m^{\mathrm{rad}}(\sigma(z))}\, m\big|_{D(\sigma(z))} \tag{1.13}$$

следующим образом:

$$F^{*\sigma}(z) := \int_{D(\sigma(z))} F(z+w)\, dm^{(\sigma(z))}(w), \quad z\in\Omega. \tag{1.14}$$

При дополнительном условии непрерывности функции σ из (1.12) это переменное усреднение также *непрерывно*. Кроме того, для субгармонических на Ω функций M всегда справедливо неравенство $M(z) \leqslant M^{*\sigma}(z)$ для всех точек $z\in\Omega$. Отбрасывая значительную часть информации из работы [8], здесь формулируется (с учетом [8, § 1.3, замечание 2])

Теорема A. *Пусть $M(0) > -\infty$ — субгармоническая функция на области $\Omega \ni 0$ с мерой Рисса $\nu := \nu_M$ и подходящим субгармоническим ядром k. Положим для сжатости обозначения $Q := Q^\nu_k$ (см. (1.10)). Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$ — последовательность точек и $0\notin\Lambda$, а f_Λ — некоторая голоморфная в Ω функция с последовательностью нулей $\mathrm{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda = \{\lambda_k\}$. Тогда*

(Z) *если выполнено хотя бы одно из следующих трех соотношений*

$$\sup_{D\in\mathfrak{U}^d_{S_0}} \left(\int_\Omega \log\bigl|f_\Lambda(z)\bigr|\, d\omega_D(0,z) - \int_\Omega M(z)\, d\omega_D(0,z)\right) < +\infty, \tag{1.15f}$$

$$\sup_{D\in\mathfrak{U}^d_{S_0}} \left(\sum_k g_D(\lambda_k,0) - \int_{\Omega\setminus\{0\}} g_D(\zeta,0)\, d\nu_M(\zeta)\right) < +\infty, \tag{1.15g}$$

$$\sup_{D\in\mathfrak{U}^d_{S_0}} \left(\sum_k g_D(\lambda_k,0) - \int_\Omega M(z)\, d\omega_D(0,z)\right) < +\infty, \tag{1.15h}$$

то при любой функции $\sigma\in C(\Omega)$, удовлетворяющей (1.12), Λ — последовательность нулей для класса $\mathrm{Hol}(\Omega; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma})$;

(U) *если $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$ — подпоследовательность нулей для некоторой ненулевой функции из $\mathrm{Hol}(\Omega; M)$, $0\notin\Lambda$, то Λ — последовательность нулей для некоторой функции из $\mathrm{Hol}(\Omega; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma})$;*

(M) *если мероморфная в Ω функция $f = g/q$ представлена в виде отношения двух функций $g, q\in\mathrm{Hol}(\Omega)$, $\max\bigl\{|g(0)|, |q(0)|\bigr\} \neq 0$, для которых выполнено одно из следующих двух условий*

$$\sup_{D\in\mathfrak{U}^d_{S_0}} \left(\int_\Omega \log\max\bigl\{|g(z)|, |q(z)|\bigr\}\, d\omega_D(0,z) - \int_\Omega M(z)\, d\omega_D(0,z)\right) < +\infty, \tag{1.16h}$$

$$g, q\in\mathrm{Hol}(\Omega; M), \tag{1.16M}$$

то найдутся функции g_0 и q_0 из класса $\mathrm{Hol}(\Omega; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma})$ *без общих нулей, с которыми также выполнено представление $f = g_0/q_0$ на Ω.*

Если функция M непрерывна, а функцию Q_ν^k заменить на мажорирующую ее почти всюду по мере Лебега m непрерывную функцию, по-прежнему обозначаемую Q, то в теореме A можно "забыть" об априорной функции σ и всюду заменить пространства $\mathrm{Hol}(\Omega; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma})$ на $\mathrm{Hol}(\Omega; M + Q)$. Кроме того, условие (1.15h) в [8, теорема 2] не фигурирует, но по формуле Пуассона–Йенсена [2], оно, очевидно, эквивалентно (1.15g).

Из формулировки теоремы A становится ясным, что одна из основных проблем в ее применениях — это оценивание интеграла Q_k^ν из (1.10), который *полностью определяется субгармонической функцией-мажорантой* M, поскольку ν — это мера Рисса функции M, а k — подходящее субгармоническое ядро для меры ν, или функции M.

Наиболее простой случай $M \equiv 0$ в качестве примеров различных классических теорем Неванлинны для конечносвязных областей и для круга $\mathbb{D}$ был подробно рассмотрен в работе [8] (см. Предложения 1.3 и 1.4, а также теоремы Неванлинны о нулях и о функциях ограниченной характеристики). В § 2 настоящей статьи мы дополнительно даем некоторую "нерадиальную" версию теоремы Неванлинны.

В § 3 решается более трудная задача, основанная на применении общего метода выметания из [8] к классам голоморфных и мероморфных в круге $\mathbb{D}$ функций умеренного и медленного роста, определяемым мажорантами вида (1.2) с подходящими ядрами Бомаша $\bar{b}_2$. В §§ 5,6 получены существенно более тонкие результаты, касающиеся весовых пространств (не алгебр!) $\mathrm{Hol}(\Omega; M)$ с подходящим ядром Бомаша $\bar{b}_2$ для M с особым упором на радиальные веса M в § 4 и модельное здесь *равномерное пространство Бергмана* (термин из [12]) в §§ 5,6, т. е. случай $M\colon z \to -\log(1 - |z|)$, $z \in \mathbb{D}$. Несмотря на кажущуюся узость таких классов, им посвящено значительное число работ (см. [13]), история которых в степени, необходимой нам, излагается в отдельных параграфах. Важно и то, что теоремы 4–6, которые вытекают исключительно из теоремы 2 или ее следствия — теоремы 3, имеют форму критерия. Это показывает, что теоремы 2 и 3 *точны* как минимум в широком классе радиальных весов M, определяющих рассматриваемые весовые пространства в круге.

Ссылка на номер формулы или утверждения над знаками (не)равенства, включения, или, более общó, бинарного отношения, означает, что при переходе к правой части этого отношения применялись, в частности, и отмеченная формула или утверждение.

§ 2. Не положительные нерадиальные версии теорем Неванлинны

Функция $M\colon \mathbb{D} \to [-\infty, +\infty]$ называется *радиальной*, если $M(z) = M(|z|)$ для каждой точки $z \in \mathbb{D}$. Эта функция *не положительна,* если существуют точки $z \in \mathbb{D}$, для которых $M(z) < 0$. Можно построить значительный запас субгармонических ограниченных сверху в $\mathbb{D}$ функций $M \not\equiv -\infty$, которые достаточно быстро убывают к $-\infty$ при приближении к точкам окружности $\partial\mathbb{D}$ по некасательным направлениям, т. е. внутри некоторых углов с вершинами в этих точках, симметричных относительно радиуса раствора $< \pi$. Правда, по теореме Лузина–Привалова множество таких точек на единичной окружности не может быть положительной линейной меры на $\partial\mathbb{D}$. Такое же убывание к $-\infty$ может наблюдаться на достаточно частой последовательности точек.

Простейший пример такой функции — это гармоническая функция

$$M\colon z := re^{i\theta} \to \operatorname{Re}\frac{-1}{1-z} = \frac{-1 - r\cos\theta}{|1-z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, r \geqslant 0, \tag{2.1}$$

стремящаяся к $-\infty$ как $O(-1/|1-z|^2)$при $z \to 1$ по некасательным направлениям. Естественно, что то же самое относиться к усреднениям

$$\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\bigl(z + \varepsilon(1-|z|)e^{i\theta}\bigr)\,d\theta, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{2.2}$$

Ограниченные сверху субгармонические добавки могут усложнить эту функцию, оставив скорость убывания усреднений по некасательным направлениям близкой к скорости убывания исходной функции M из (2.1).

Напомним, что в теоремах же Неванлинны, приведенных, к примеру, и в [8], речь шла лишь о постоянных функциях-мажорантах $M \equiv 0$ на $\mathbb{D}$.

Из совместных результатов-критериев Ю. И. Любарского и К. Сейпа можно сконструировать много функций, обладающих свойством убывания к $-\infty$ при приближении к значительной части точек единичной окружности. Конкретнее, *для произвольной возрастающей функции* $p\colon [0,1) \to [1,+\infty)$*, удовлетворяющей условию*

$$\int_0^1 \frac{dr}{(1-r)p(r)} = +\infty, \tag{2.3}$$

и для произвольной последовательности точек $\Gamma = \{\gamma_k\} \subset \mathbb{D}$*, разделенной в том смысле, что*

$$\inf_{j\neq k}\left|\frac{\gamma_j - \gamma_k}{1 - \overline{\gamma}_j\gamma_k}\right| > 0 \tag{2.4}$$

следует

[14, теорема 2] *существование субгармонической функции* $u \not\equiv -\infty$*, ограниченной сверху на* $\mathbb{D}$*, для которой*

$$\int_{\bigl\{z\in\mathbb{D}\colon\, u(z) < -p(|z|)\bigr\}} \frac{dm(z)}{1-|z|} = +\infty; \tag{2.5}$$

[14, теорема 1] *существование ограниченной сверху голоморфной в* $\mathbb{D}$ *функции* $f \not\equiv 0$ *такой, что* $\log|f(\gamma_k)| \leqslant -p(|\gamma_k|)$ *для всех* k.

Из последней голоморфной функции f легко получить пример и *непрерывной* субгармонической функции на $\mathbb{D}$, для которой $u(\gamma_k) \leqslant -p(|\gamma_k|)$ при всех k. Для этого достаточно вымести функцию $\log|f|$ из непересекающихся кругов $D(\lambda_k, \varepsilon_k)$ достаточно малых радиусов ε_k с центрами в нулях $\{\lambda_k\} = \operatorname{Zero}_f$ функции f, т. е. заменить в этих кругах функции $\log|f|$ на интеграл Пуассона [7, теорема 2.4.5 (о склеивании)]. С помощью той же процедуры функции $\log|f|$, поставляемых примерами (см. монографию И. И. Привалова [15, гл. IV, § 3]) ограниченных голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f с граничными значениями, равными нулю на заданном множестве E меры нуль на единичной окружности, можно превратить в непрерывные ограниченные сверху не положительные субгармонические функции, стремящиеся к $-\infty$ при приближении к E.

Более подробную информацию по вопросам построения достаточно быстро убывающих к $-\infty$ голоморфных и субгармонических функций в круге и в других областях можно получить из совместного обзора В. Я. Эйдермана и М. Эссéна [16, теоремы 3.1, 4.1, следствия 3.2, 4.5(2), лемма 4.3].

Вся предшествующая часть § 2 позволяет считать мотивированными следующие версии теорем Неванлинны.

Для $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ и числа $a > 0$ введем в рассмотрение полярный прямоугольник

$$\boxminus(z;a) := \bigl\{\, \zeta = te^{i\psi} \colon \bigl(r - a\sqrt{1-r^2}\bigr)^+ \leqslant t < 1,\ |\sin(\psi-\theta)| < a\sqrt{1-r^2}\,\bigr\} \tag{2.6}$$

относительного размера a и функцию

$$q_M^{[a]}(z) := \frac{1}{1-|z|} \int_{\boxminus(z;a)} (1-|\zeta|)\, d\nu_M(\zeta). \tag{2.7}$$

Теорема 1. *Пусть M — субгармоническая функция в $\mathbb{D}$, $M(0) > -\infty$ и имеет место ограничение*

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} M(re^{i\theta})\, d\theta < +\infty, \tag{2.8}$$

эквивалентное выполнению для ее меры Рисса $\nu := \nu_M$ условия Бляшке

$$\int_0^1 (1-t)\, d\nu^{\mathrm{rad}}(t) < +\infty. \tag{2.9}$$

Тогда

(Z) *если при $\Omega = \mathbb{D}$ выполнено хотя бы одно из трех условий* (1.15), *то при любых числах $\varepsilon \in (0,1)$ и $1 < a < 2$ последовательность Λ — последовательность нулей для пространства*

$$\operatorname{Hol}\Bigl(\mathbb{D}; \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]} + \frac{C_\varepsilon}{2-a}\, q_M^{[a]}\Bigr), \tag{2.10}$$

где постоянная C_ε зависит только от ε;

(U) *если Λ — подпоследовательность нулей для* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D};M)$*, то это последовательность нулей для пространства* (2.10)*;*

(M) *если мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f=g/q$ представлена в виде отношения двух функций* $g,q\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, $\max\bigl\{|g(0)|,|q(0)|\bigr\}\neq 0$*, для которых выполнено одно из двух условий* (1.16h)–(1.16M) *при* $\Omega=\mathbb{D}$*, то найдутся функции g_0 и q_0 из класса* (2.10) *без общих нулей, для которых также справедливо представление $f=g_0/q_0$ на $\mathbb{D}$.*

Доказательство. Доказательство будет разбито на 4 шага — в основном для оценки сверху интеграла $Q=Q_\nu^k$ из (1.10), равного в данном случае

$$Q(z):=\int_{\mathbb{D}}\bigl(\overline{b}_1(\zeta,0)-\overline{b}_1(\zeta,z)\bigr)^+\,d\nu(\zeta),\quad z\in\mathbb{D},\tag{2.11}$$

поскольку по условию Бляшке (2.9) именно логарифмическое ядро $\overline{b}_1$ является подходящим для нашей меры $\nu=\nu_M$. В явном виде

$$Q(z):=\int_{\mathbb{D}}\left(\log|\zeta|^2-\log\left|\frac{\overline{\zeta}(\zeta-z)}{1-\overline{\zeta}z}\right|\right)^+\,d\nu(\zeta),\quad z\in\mathbb{D}.\tag{2.12}$$

Для требуемой оценки нам достаточно в случае положительного $z=x\geqslant 0$ описать фактическую область интегрирования

$$S_1^+(z):=\left\{\zeta\in\mathbb{D}\colon |\zeta|^2>\left|\frac{\overline{\zeta}(\zeta-x)}{1-\overline{\zeta}x}\right|\right\}=\bigl\{\zeta\in\mathbb{D}\colon \rho(\zeta,x)<|\zeta|\bigr\}.\tag{2.13}$$

Шаг 1. Ограничения на $S_1^+(z)$. Пусть $\zeta=te^{i\psi}$, $0\leqslant t<1$. Решаем неравенство

$$t^2>\frac{t|te^{i\psi}-x|}{|1-te^{-i\psi}x|}\,.\tag{2.14}$$

Возводя обе части в квадрат, переходим к эквивалентному неравенству

$$t^2>\frac{t^2-2tx\cos\psi+x^2}{1-2tx\cos\psi+t^2x^2}\,.\tag{2.15}$$

Решая его относительно $\cos\psi$, находим

$$\cos\psi>x\frac{1+t^2}{2t}\geqslant x,\tag{2.16}$$

откуда имеем

$$|\sin\psi|<\sqrt{1-x^2}\ \text{ при } \zeta=te^{i\psi}\in S_1^+(x).\tag{2.17}$$

Затем, огрубляя левую часть (2.16) до 1, из квадратного относительно t неравенства xt^2-2t+x находим ограничения

$$1>t>\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\geqslant x-\sqrt{1-x^2}.\tag{2.18}$$

Таким образом, из двух последних неравенств, используя повороты круга на угол $-\theta$, получаем включение

$$S_1^+(z) \overset{(2.6)}{\subset} \boxminus(z;1). \tag{2.19}$$

Покажем, кроме того, что при $|z| > 2/3$ круг $D(z, 1-|z|)$ содержится в $\boxminus(z;1)$. Вновь достаточно обойтись случаем $z = x > 0$. Расстояние от точки x согласно (2.18) до самой удаленной точки полярного квадрата $\boxminus(x;1)$ на отрезке $[0,x]$ равно $\sqrt{1-x^2}$, что больше $1-x$ при всех $0 < x < 1$. Кроме того, ввиду равенства $\sin\psi = \pm\sqrt{1-x^2}$ для точек $\zeta = te^{i\psi}$, лежащих на двух ограничивающих полярный квадрат $\boxminus(x;1)$ частях радиусов круга $\mathbb{D}$, расстояние до этих частей равно $x\sqrt{1-x^2}$. Неравенство $1-x \leqslant x\sqrt{1-x^2}$ эквивалентно неравенству $1-x \leqslant x^2(1+x) \iff 1 \leqslant x^3+x^2+x$. Последнее гарантированно выполнено при $x \geqslant 2/3$. Следовательно,

$$D(z, 1-|z|) \overset{(2.6)}{\subset} \boxminus(z;1) \ \text{ при всех } 2/3 \leqslant |z| < 1. \tag{2.20}$$

Шаг 2. Подынтегрального выражение из (2.12) **на** $\boxminus(z;1) \supset S_1^+(z)$**.** Из явного вида подынтегрального выражение из (2.11)–(2.12) получаем

$$\bigl(\overline{b}_1(\zeta,0) - \overline{b}_1(\zeta,x)\bigr)^+ = \log^+ \frac{|\zeta||1-\overline{\zeta}x|}{|\zeta - x|}\,. \tag{2.21}$$

При произвольном заданном $0 < \varepsilon < 1$ и $z = x \geqslant 2/3$ оценим его сверху *в круге* $D(x, \varepsilon(1-x))$:

$$\bigl(\overline{b}_1(\zeta,0) - \overline{b}_1(\zeta,x)\bigr)^+ \leqslant \log\Bigl|\frac{\varepsilon(1-x)}{\zeta - x}\Bigr| + \log^+ \frac{|\zeta||1-\overline{\zeta}x|}{\varepsilon|1-x|}\,.$$

Здесь первое слагаемое в правой части — это в точности функция Грина для круга $D(x,\varepsilon(1-x))$ с полюсом в центре этого круга. Таким образом, последнее неравевство можно продолжить как

$$\bigl(\overline{b}_1(\zeta,0) - \overline{b}_1(\zeta,x)\bigr)^+ \leqslant g_{D(x,\varepsilon(1-x))}(\zeta,x) + \log^+ \frac{|1-\overline{\zeta}x|}{\varepsilon|1-x|} \tag{2.22}$$

для всех $\zeta \in D(x,\varepsilon(1-x))$. Но для последнего слагаемого в этом случае

$$\log^+ \frac{|1-\overline{\zeta}x|}{\varepsilon|1-x|} \leqslant \log\frac{1}{\varepsilon} + \log^+\Bigl|\frac{(1-x^2)+(x^2-\overline{\zeta}x)}{1-x}\Bigr|$$
$$\leqslant \log\frac{1}{\varepsilon} + \log^+\Bigl((1+x) + x\frac{|x-\overline{\zeta}|}{1-x}\Bigr)\,.$$

Поскольку $\zeta \in D(x,\varepsilon(1-x))$, то $|x-\overline{\zeta}| \leqslant \varepsilon(1-x)$ и переходим к оценке

$$\log^+ \frac{|1-\overline{\zeta}x|}{\varepsilon|1-x|} \leqslant \log\frac{1}{\varepsilon} + \log(1+x+\varepsilon x) \leqslant \log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\,. \tag{2.23}$$

Но для компактной формы окончательного результата доказываемой теоремы нам придется несколько усложнить правую часть. При $\zeta \in D\bigl(x, \varepsilon(1-x)\bigr)$ имеем
$$\frac{1-|\zeta|}{1-x} \geqslant \frac{1-(x+\varepsilon(1-x))}{1-x} \geqslant 1-\varepsilon,$$
что преобразует неравенство (2.23) в
$$\log^+ \frac{|1-\bar\zeta x|}{\varepsilon|1-x|} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{1-|\zeta|}{1-x}\,. \tag{2.24}$$

Таким образом, *для всех точек* $\zeta \in D\bigl(z, \varepsilon(1-|z|)\bigr)$ *при* $2/3 \leqslant |z| < 1$ *и* $0<\varepsilon<1$ *получаем оценку*
$$\bigl(\overline{b}_1(\zeta,0)-\overline{b}_1(\zeta,z)\bigr)^+ \leqslant g_{D(z,\varepsilon(1-|z|))}(\zeta,z)+C_\varepsilon\,\frac{1-|\zeta|}{1-|z|}\,, \tag{2.25}$$
где постоянная $C_\varepsilon = \frac{1}{1-\varepsilon}\log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$ *зависит только от* ε.

Оценим подынтегральное выражение на множестве
$$\boxminus(z;1) \setminus D\bigl(z, \varepsilon(1-|z|)\bigr).$$
Вновь достаточно ограничиться случаем $z = x \geqslant 2/3$. Из представления (2.12), учитывая неравенство $|\zeta-x| \geqslant \varepsilon(1-x)$, получаем
$$\bigl(\overline{b}_1(\zeta,0)-\overline{b}_1(\zeta,z)\bigr)^+ = \log^+\Bigl|1+\frac{x(1-|\zeta|^2)}{\zeta-x}\Bigr| \leqslant \frac{x(1-|\zeta|^2)}{\varepsilon|1-x|} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\cdot\frac{(1-|\zeta|)}{|1-x|}\,.$$
Из двух последних оценок окончательно получаем оценку вида (2.25) всюду в $\boxminus(z;1)$ при всех $2/3 \leqslant |z| < 1$, поскольку функция Грина $g_{D(z,\varepsilon(1-|z|))}$ рассматривается как продолженная нулем вне $D(z,\varepsilon(1-|z|))$, а через C_ε можно переобозначить наибольшее из двух чисел: первоначального C_ε и $2/\varepsilon$.

Шаг 3. Верхняя оценка интеграла (2.11). Из результатов предыдущих двух шагов следует, что при $|z| \geqslant 2/3$
$$\begin{aligned} Q(z) &\leqslant \int_{\boxminus(z;1)} \Bigl(g_{D(z,\varepsilon(1-|z|))}(\zeta,z)+C_\varepsilon\,\frac{1-|\zeta|}{1-|z|}\Bigr)\,d\nu_M(\zeta)\\ &= \int_{D(z,\varepsilon(1-|z|))} g_{D(z,\varepsilon(1-|z|))}(\zeta,z)\,d\nu_M(\zeta) + \frac{C_\varepsilon}{1-|z|}\int_{\boxminus(z;1)}(1-|\zeta|)\,d\nu_M(\zeta)\\ &= \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z)-M(z)+C_\varepsilon q_M^{[1]}(z), \end{aligned} \tag{2.26}$$
где в обозначении (2.2) на последнем шаге использованы классическая формула Пуассона–Йенсена [2]
$$M(z) = \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) - \int_{D(z,\varepsilon(1-|z|))} g_{D(z,\varepsilon(1-|z|))}(\zeta,z)\,d\nu_M(\zeta) \tag{2.27}$$

и обозначение (2.7).

Ниже при применении теоремы A нам придется иметь дело с переменным усреднением (1.14) по выбираемой нами произвольной функции $\sigma \in C(\mathbb{D})$ на $\Omega = \mathbb{D}$, удовлетворяющей лишь условию (1.12) $0 < \sigma(z) < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$. Поэтому сразу отметим, что в силу непрерывности функции $\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}$ и явного вида функции $q_M^{[1]}$ из (2.7) для любого числа $a \in (1,2)$ *непрерывную функцию* $\sigma(z) < (a-1)(1-|z|)$ можно подобрать столь малой, что

$$\bigl(\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z)\bigr)^{*\sigma} \leqslant \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + 1 \quad \text{при всех } z \in \mathbb{D}, \tag{2.28A}$$

$$\begin{aligned}\bigl(q_M^{[1]}(z)\bigr)^{*\sigma} &\leqslant \sup_{|z-w|\leqslant\sigma(z)} q_M^{[1]}(w)\\ &\leqslant \frac{1}{\bigl(1-|z|-(a-1)(1-|z|)\bigr)} \sup_{|z-w|\leqslant\sigma(z)} \int_{\boxminus(w;1)} (1-|\zeta|)\,d\nu_M(\zeta)\\ &\leqslant \frac{1}{2-a}\,\frac{1}{1-|z|} \int_{\boxminus(z;a)} (1-|\zeta|)\,d\nu_M(\zeta) = \frac{1}{2-a}\, q_M^{[a]}(z)\end{aligned} \tag{2.28q}$$

также *при всех* $z \in \mathbb{D}$.

Шаг 4. Доказательство пп. (Z),(U),(M) теоремы 1. По предыдущим шагам при выбранной в п. 3 доказательства непрерывной функции σ из (2.26) с учетом (2.28A) и (2.28q) с произвольной постоянной $a > 1$ получаем, что при $|z| \geqslant 2/3$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}M^{*\sigma}(z) + Q^{*\sigma}(z) &\leqslant M^{*\sigma}(z) + \bigl(\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + 1\bigr) - M^{*\sigma}(z) + 2C_\varepsilon q_M^{[a]}(z)\\ &= \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + \frac{2C_\varepsilon}{2-a}\, q_M^{[a]}(z) + 1,\end{aligned} \tag{2.29}$$

При этом для $|z| \leqslant 2/3$ правая часть последнего неравенства ограничена снизу константой, так как функция-усреднение $\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}$ непрерывна всюду на $\mathbb{D}$, а последнее слагаемое в (2.29) положительно. В силу непрерывности функции $M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}$ на $\mathbb{D}$ (см. комментарий после (1.13) к переменному усреднению (1.14), а также после (1.10)) можно подобрать постоянную $C \geqslant 0$ столь большой, что

$$M^{*\sigma}(z) + Q^{*\sigma}(z) \leqslant \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + \frac{2C_\varepsilon}{2-a}\, q_M^{[a]}(z) + C \tag{2.30}$$

уже *для всех точек* $z \in \mathbb{D}$. Отсюда по п. (Z) теоремы A при $\Omega = \mathbb{D}$ в условиях п. (Z) теоремы 1 последовательность Λ — последовательность нулей для пространства

$$\begin{aligned}\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}) &\subset \operatorname{Hol}\Bigl(\mathbb{D}; \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + \frac{2C_\varepsilon}{2-a}\, q_M^{[a]}(z) + C\Bigr)\\ &= \operatorname{Hol}\Bigl(\mathbb{D}; \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + \frac{2C_\varepsilon}{2-a}\, q_M^{[a]}(z)\Bigr).\end{aligned}$$

Совершенно аналогично при $\Omega = \mathbb{D}$ из пп. (U) и (M) теоремы A следуют пп. (U) и (M) теоремы 1.

Теорема доказана. •

При определенном радиальном поведении веса M в отдельных секторах в круге $\mathbb{D}$ возможна модификация результатов теоремы 1.

Функция $M\colon z = re^{i\theta} \to [-\infty, +\infty]$ называется *радиальной в секторе*

$$\measuredangle(\alpha,\beta) := \{z = re^{i\theta} \colon 0 \leqslant r < 1,\ \alpha < \theta < \beta\} \tag{2.31}$$

из $\mathbb{D}$, если при каждом $0 \leqslant r < 1$ функция $M(re^{i\theta})$ не зависит от $\theta \in \measuredangle(\alpha,\beta)$.

Следствие. *Если в каком-либо строго объемлющем секторе* $\measuredangle(\alpha',\beta') \supset \measuredangle(\alpha,\beta)$ *в том смысле, что* $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$, *вес* M *из теоремы* 1 *радиален и дифференцируем по радиусу, то при* a *из достаточно малой правой окрестности* 1 *для всех трех утверждений* (Z),(U) и (M) *этой теоремы для точек* $z \in \measuredangle(\alpha,\beta)$ *слагаемое* $\frac{C_\varepsilon}{2-a}\, q_M^{[a]}(z)$ *в весе, определяющем пространство* (2.10), *можно заменить при выборе достаточно малого* $a > 1$ *на слагаемое*

$$\frac{aC_\varepsilon}{2(2-a)}\,\frac{1}{\sqrt{1-|z|}}\int_{\left(|z|-a\sqrt{1-|z|^2}\right)^+}^1 (1-t)\,d(tM'(t)). \tag{2.32}$$

Доказательство. Сужение меры Рисса ν_M на сектор, объемлющий сектор $\measuredangle(\alpha,\beta)$, ввиду радиальности M в этом секторе имеет вид

$$d\nu_M(z) = \frac{1}{2\pi}\,d\theta \otimes d\bigl(tM'(t)\bigr), \quad z := te^{i\theta},\ 0 \leqslant t < 1, \tag{2.33}$$

При достаточно малом $a < 1$ из описания полярного прямоугольника $\boxminus(z;a)$ в (2.6) найдется $c < 1$, для которого для всех $z = re^{i\theta}$ при $r \geqslant c$ независимо от $\theta \in (\alpha,\beta)$ имеем $\boxminus(z;a) \subset \measuredangle(\alpha,\beta)$. Отсюда при $|z| \geqslant c$ и $z \in \measuredangle(\alpha,\beta)$ из вида (2.7) функции $q_M^{[a]}(z)$ согласно (2.33) получаем

$$\begin{aligned}
q_M^{[a]}(z) =&\frac{1}{1-|z|}\int_{\boxminus(z;a)} (1-|\zeta|)\,d\nu_M(\zeta)\\
=&\frac{1}{1-r}\cdot\frac{\arcsin a\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\int_{r-a\sqrt{1-r^2}}^1 (1-t)\,d\bigl(tM'(t)\bigr)\\
\leqslant&\frac{1}{1-r}\cdot\frac{(\pi/2)a\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\int_{r-a\sqrt{1-r^2}}^1 (1-t)\,d\bigl(tM'(t)\bigr)\\
\leqslant&\frac{a}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-|z|}}\int_{|z|-a\sqrt{1-|z|^2}}^1 (1-t)\,d\bigl(tM'(t)\bigr).
\end{aligned}$$

Тем самым возможность требуемой в следствии замены доказана при $|z| \geqslant c$. На весь сектор $\measuredangle(\alpha,\beta)$ она распространяется так же, как в п. 4 доказательства теоремы 1, за счет непрерывности $M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}$ на $\mathbb{D}$. •

§ 3. Веса с подходящим ядром Бомаша $\overline{b}_2$

Рассматриваемый в этом параграфе случай оказался для нас технически гораздо более сложным. Он тесно связан с равномерными пространствами Бергмана, которые будут рассмотрены в §§ 5,6 .

Для $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ и числа $a > 0$ введем в рассмотрение полярный прямоугольник

$$\square(z;a) := \left\{ \zeta = te^{i\psi} \colon \bigl(r - a(1-r)\bigr)^+ \leqslant t < 1,\ |\sin(\psi - \theta)| < a(1-r) \right\} \tag{3.1}$$

относительного размера a и функцию

$$b_M^{[a]}(z) := \frac{1}{(1-|z|)^2} \int_{\square(z;a)} (1-|\zeta|)^2 \, d\nu_M(\zeta). \tag{3.2}$$

Теорема 2. *Пусть M — субгармоническая функция с мерой Рисса $\nu := \nu_M$, $M(0) > -\infty$ и выполнено условие*

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) \, d\theta \, dt < +\infty \tag{3.3}$$

или эквивалентное ему ограничение

$$\int_0^1 (1-t)^2 \, d\nu^{\mathrm{rad}}(t) < +\infty. \tag{3.4}$$

Тогда

(Z) *если при $\Omega = \mathbb{D}$ выполнено хотя бы одно из трех условий* (1.15), *то при любом $\varepsilon \in (0,1)$ последовательность Λ — последовательность нулей для пространства*
$$\mathrm{Hol}\Bigl(\mathbb{D}; \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_M^{[6]}\Bigr), \tag{3.5}$$
где постоянная C_ε зависит только от ε;

(U) *если Λ — подпоследовательность нулей для* $\mathrm{Hol}(M)$, *то это последовательность нулей для пространства* (3.5)*;*

(M) *если мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f = g/q$ представлена в виде отношения двух функций $g, q \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, $\max\bigl\{|g(0)|, |q(0)|\bigr\} \neq 0$, для которых выполнено одно из двух условий* (1.16h)–(1.16M) *при $\Omega = \mathbb{D}$, то найдутся функции g_0 и q_0 из класса* (3.5) *без общих нулей, с которыми также справедливо представление $f = g_0/q_0$ на $\mathbb{D}$.*

Доказательство. Здесь мы используем только импликацию (3.3)$\Longrightarrow$(3.4), поэтому ограничимся лишь ее выводом. Из (3.3) в силу возрастания среднего по окружностям от субгармонической функции M, очевидно, следует

$$\lim_{t \to 1^-} (1-t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) \, d\theta = 0.$$

Тогда из (3.3) интегрированием по частям получаем

$$\int_0^1 t(1-t) \, d\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) \, d\theta \right) \leqslant \int_0^1 (1-t) \, d\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(te^{i\theta}) \, d\theta \right) < +\infty.$$

Здесь в левой части для вывода (3.4) остается использовать классическое равенство Пуассона–Йенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(te^{i\theta})\,d\theta = \int_0^t \frac{\nu^{\mathrm{rad}}(\tau)}{\tau}\,d\tau + M(0) \tag{3.6}$$

и снова применить интегрирование по частям.

Теперь вновь, как и при доказательстве теоремы 1, будем оценивать сверху интеграл $Q(z) := Q_k^{\nu}(z)$ вида (1.10), построенный по субгармоническим ядру Бомаша $k = \overline{b}_2$:

$$Q(z) := \int_{\mathbb{D}} \bigl(\overline{b}_2(\zeta,0) - \overline{b}_2(\zeta,z)\bigr)^+ \,d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.7}$$

поскольку по условию (3.4) именно логарифмическое ядро $\overline{b}_2$ является подходящим для нашей меры $\nu = \nu_M$. Преобразуем логарифмическое ядро $\overline{b}_2$ к виду

$$\overline{b}_2(\zeta,z) := \log\bigl|1 - (1-\overline{B}_\zeta(z))^2\bigr| = \log\left|1 - \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}z}\right)^2\right| \tag{3.8a}$$

$$= \log\bigl(\bigl|\overline{B}_\zeta(z)\bigr|\bigl|2 - \overline{B}_\zeta(z)\bigr|\bigr) = \log\frac{|\zeta||\zeta - z|\bigl|2 - |\zeta|^2 - \overline{\zeta}z\bigr|}{|1-\overline{\zeta}z|^2}, \tag{3.8b}$$

откуда интеграл (3.7) имеет вид

$$Q(z) \overset{(3.8b)}{:=} \int_{\mathbb{D}} \Bigl(\log|\zeta|^2(2-|\zeta|^2) - \log\Bigl(\bigl|\overline{B}_\zeta(z)\bigr|\bigl|2-\overline{B}_\zeta(z)\bigr|\Bigr)\Bigr)^+ \,d\nu(\zeta), \tag{3.9В}$$

$$\overset{(3.8b)}{=} \int_{S_2^+(z)} \left(\log|\zeta|(2-|\zeta|^2) - \log\frac{|\zeta - z|\bigl|2 - |\zeta|^2 - \overline{\zeta}z\bigr|}{|1-\overline{\zeta}z|^2}\right)^+ \,d\nu(\zeta), \tag{3.9c}$$

где

$$S_2^+(z) \overset{(3.9c)}{:=} \left\{\zeta \in \mathbb{D}\colon\ \log|\zeta|(2-|\zeta|^2) > \log\frac{|\zeta - z|\bigl|2 - |\zeta|^2 - \overline{\zeta}z\bigr|}{|1-\overline{\zeta}z|^2}\right\}. \tag{3.10}$$

Для описания области интегрирования $S_2^+(z)$ в (3.9) нам достаточно рассмотреть только случай положительного $z = x \geqslant 0$, т.е. область

$$S_2^+(x) \overset{(3.9В)}{:=} \bigl\{\zeta \in \mathbb{D}\colon |\zeta|^2(2-|\zeta|^2) > \bigl|\overline{B}_\zeta(x)\bigr|\bigl|2-\overline{B}_\zeta(x)\bigr|\bigr\}\,. \tag{3.11}$$

Так как $t \to t^2(2-t^2)$ — строго возрастающая функция на $[0,1)$ и $\bigl|\overline{B}_\zeta(x)\bigr| < 1$ для $\zeta \in \mathbb{D}$, при $\zeta \in S_2^+(x)$ ввиду (3.11) имеем $|\zeta|^2 > \bigl|\overline{B}_\zeta(x)\bigr|$, т. е., $|\zeta| > \rho(\zeta,x)$. Таким образом, согласно (2.13) получаем

$$S_2^+(x) \subset S_1^+(x), \quad \forall x \in [0,1). \tag{3.12}$$

В силу включения (2.19) множества $S_1^+(x)$ в $\boxminus(x;1)$ это значит, в частности, что область $S_2^+(x)$ лежит *в правой полуплоскости* при всех $x > 0$.

Далее доказательство также разбивается на 4 шага.

Шаг 1. Ограничения на $S_2^+(z)$. Пусть $\zeta = te^{i\psi}$, $0 \leqslant t < 1$, $z = x > 0$. Ввиду (3.10) при $\zeta \in S_2^+$ должно выполняться неравенство

$$\log\bigl(|\zeta|(2-|\zeta|^2)\bigr) > \log\frac{|\zeta - x|\bigl|2-|\zeta|^2-\overline{\zeta}x\bigr|}{|1-\overline{\zeta}x|^2}$$

Перепишем это неравенство в полярной форме:

$$\begin{aligned} t^2(2-t^2)^2 &> \frac{(t^2-2tx\cos\psi+x^2)\bigl((2-t^2)^2-2(2-t^2)tx\cos\psi+t^2x^2\bigr)}{(1-2tx\cos\psi+t^2x^2)^2} \\ &= \frac{\bigl((t-x)^2+4tx\sin^2(\psi/2)\bigr)\bigl((2-t^2-tx)^2+4(2-t^2)tx\sin^2(\psi/2)\bigr)}{\bigl((1-tx)^2+4tx\sin^2(\psi/2)\bigr)^2}\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Для удобства положим

$$s := \sin^2\frac{\psi}{2}\,. \tag{3.14}$$

Кроме того, $2-t^2 \geqslant t^2(2-t^2)^2$ для $t \in [0,1)$. Следовательно, неравенство (3.13) влечет за собой

$$2-t^2 > \frac{\bigl((t-x)^2+4txs\bigr)\bigl((2-t^2-tx)^2+4(2-t^2)txs\bigr)}{\bigl((1-tx)^2+4txs\bigr)^2}\,,$$

откуда прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} s\cdot q(t,x) &:= s\cdot 4tx\bigl((2-t^2-tx)^2+(t-x)^2(2-t^2)-2(1-tx)^2(2-t^2)\bigr) \\ &< (1-tx)^4(2-t^2)-(t-x)^2(2-t^2-tx)^2 =: p(t,x), \end{aligned} \tag{3.15}$$

где многочлены q и p определены соответственно первым и вторым равенствами. При этом для многочлена q удается получить следующее разложение на множители:

$$q(t,x) = 8x^3t(1-t^2)^2 > 0, \quad t \in (0,1), \quad x \in (0,1).$$

Это позволяет получить верхнюю оценку для s:

$$\begin{aligned} s < \frac{p(t,x)}{q(t,x)} &= \frac{(1-tx)^4(2-t^2)-(t-x)^2(2-t^2-tx)^2}{8tx^3(1-t^2)^2} \\ &= \frac{(1-t)^2(1+t^2)(-t^2-x^4t^2+4x^3t+2-4x^2)}{8x^3t(1-t^2)^2} \\ &= \frac{1}{8x^3t}\,(-t^2-x^4t^2+4x^3t+2-4x^2) \\ &= \frac{1}{8x^3t}\,\bigl(-(1+x^4)t^2+(4x^3)t+2(1-2x^2)\bigr) =: \frac{1}{8x^3t}\,g_x(t)\,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

где квадратный трехчлен g_x определен последним равенством. По определению (3.14), $s \geqslant 0$. Следовательно, квадратный трехчлен $g_x(t)$ обязан быть строго положительным для $\zeta = te^{i\psi} \in S_2^+(x)$, откуда

$$t > \frac{2x^3 - \sqrt{2}(1-x^2)}{1+x^4} = x - \left(x - \frac{2x^3 - \sqrt{2}(1-x^2)}{1+x^4}\right)$$
$$= x - (1-x^2)\,\frac{\sqrt{2} + x(1-x^2)}{1+x^4} \geqslant x - 2(1-x^2) \geqslant x - 4(1-x). \quad (3.17)$$

В частности,

$$\text{если } x \geqslant 9/10, \quad \text{то} \quad t > 1/2. \quad (3.18)$$

Теперь мы должны найти верхнюю оценку для s. Вновь рассмотрим неравенство (3.16). Квадратный трехчлен g_x достигает максимума в точке $t_x = 2x^3/(1+x^4)$, так что

$$g_x(t_x) = -(1+x^4)\left(\frac{2x^3}{1+x^4}\right)^2 + 4x^3\,\frac{2x^3}{1+x^4} + 2(1-2x^2)$$
$$= \frac{2-4x^2+2x^4}{1+x^4} = \frac{2(1-x^2)^2}{1+x^4} \leqslant 2(1-x)^2 \max_{0\leqslant x<1} \frac{(1+x)^2}{1+x^4} \leqslant 5(1-x)^2$$

для каждого $x \in [0,1)$. Отсюда, ввиду (3.14) и (3.16), получаем

$$\sin^2\frac{\psi}{2} = s < \frac{1}{8x^3 t}\cdot 5(1-x)^2.$$

Таким образом, для $x \geqslant 9/10$ согласно (3.18) имеем $t \geqslant 1/2$ и

$$|\sin\psi| \leqslant \sqrt{\frac{1}{8x^3 t}\cdot 5(1-x)^2\cdot 4\cos^2\frac{\psi}{2}} \leqslant \sqrt{5x^3}(1-x) \leqslant 3(1-x). \quad (3.19)$$

Отсюда и из (3.17) имеем вложение

$$S_2^+(x) \subset \bigl\{\zeta = te^{i\psi}\colon x - 4(1-x) < t < 1,\ \sin|\psi| < 3(1-x)\bigr\} \quad (3.20)$$

для всех $9/10 \leqslant x < 1$, а для $z \in \mathbb{D}$

$$S_2^+(z) \subset \Box(z;4) \ \text{ при всех } |z| \geqslant 9/10. \quad (3.21)$$

Шаг 2. Оценка подынтегрального выражения из (3.9) **на прямоугольнике $\Box(z;4) \supset S_2^+(z)$.** Легко видеть, что при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $z \neq 0$ имеет место включение

$$D\bigl(z, \varepsilon(1-|z|)\bigr) \subset \Box(z;4). \quad (3.22)$$

При $z = x > 0$ из (3.8b) имеем оценку (ср. с (2.22)) через функцию Грина $g_{D(x,\varepsilon(1-x))}(\zeta, x)$ круга $D\bigl(x, \varepsilon(1-x)\bigr)$ с полюсом в x:

$$\bigl(\overline{b}_2(\zeta,0) - \overline{b}_2(\zeta,x)\bigr)^+ \leqslant g_{D(x,\varepsilon(1-x))}(\zeta,x) + \log^+ \frac{|\zeta|\bigl(2-|\zeta|^2\bigr)|1-\overline{\zeta}x|^2}{\varepsilon(1-x)\bigl|2-|\zeta|^2-\overline{\zeta}x\bigr|}\,. \quad (3.23)$$

При $\zeta \in \mathbb{D}$ и $0 \leqslant x < 1$ получаем $|\zeta|\big(2-|\zeta|^2\big) \leqslant 2$, а также

$$\big|2-|\zeta|^2-\overline{\zeta}x\big| = \big|2-\overline{\zeta}(\zeta+x)\big| \geqslant 2-|\overline{\zeta}|(|\zeta|+x) \geqslant 1-x. \tag{3.24}$$

Кроме того, при $0<\varepsilon<1$, $9/10 \leqslant x < 1$ и $\zeta = te^{i\psi}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}|1-\overline{\zeta}x|^2 &= (1-tx)^2+4tx\sin^2\frac{\psi}{2} \leqslant \big(1-\big(x-\varepsilon(1-x)\big)x\big)^2+4tx\Big(\frac{\varepsilon(1-x)}{x}\Big)^2\\ &\leqslant (1-x)^2\big((1+x+\varepsilon x)^2+4t\varepsilon^2/x\big) \leqslant (1-x)^2(9+4/x) \leqslant 15(1-x)^2.\end{aligned}$$

Последние неравенства на основе (3.23) дают при $9/10 \leqslant x < 1$ оценку

$$\big(\overline{b}_2(\zeta,0)-\overline{b}_2(\zeta,x)\big)^+ \leqslant g_{D(x,\varepsilon(1-x))}(\zeta,x)+\log\frac{30}{\varepsilon}. \tag{3.25}$$

Для удобства записи формулировки доказываемой теоремы с помощью неравенства

$$\frac{(1-|\zeta|)^2}{(1-x)^2} \geqslant \frac{\big(1-(x+\varepsilon(1-x))\big)^2}{(1-x)^2} \geqslant (1-\varepsilon)^2, \quad \forall \zeta \in \Delta_\varepsilon(x) \tag{3.26}$$

можно ослабить (3.25) до *оценки*

$$\big(\overline{b}_2(\zeta,0)-\overline{b}_2(\zeta,z)\big)^+ \leqslant g_{D(z,\varepsilon(1-|z|))}(\zeta,z)+C_\varepsilon\frac{(1-|\zeta|)^2}{(1-|z|)^2}, \tag{3.27}$$

выполненной при всех $9/10 \leqslant |z| < 1$, $\zeta \in D\big(z,\varepsilon(1-|z|)\big)$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, *где постоянная* $C_\varepsilon = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\log\frac{30}{\varepsilon}$ *зависит только от* ε.

Оценим теперь при $\zeta \in \square(x;4)\setminus D\big(z,\varepsilon(1-|z|)\big)$, исходя уже из представления (3.8а), то же подынтегральное выражение

$$\begin{aligned}\big(\overline{b}_2(\zeta,0)-\overline{b}_2(\zeta,x)\big)^+ &= \log^+\left|\frac{1-(1-|\zeta|^2)^2}{1-\Big(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}x}\Big)^2}\right|\\ &= \log^+\left|1+\frac{\Big(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}x}\Big)^2-(1-|\zeta|^2)^2}{1-\Big(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}x}\Big)^2}\right| \leqslant \left|\frac{\Big(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}x}\Big)^2-(1-|\zeta|^2)^2}{1-\Big(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{\zeta}x}\Big)^2}\right|\\ &= (1-|\zeta|^2)^2\,\frac{\big|1-(1-\overline{\zeta}x)^2\big|}{\big|(1-\overline{\zeta}x)^2-(1-|\zeta|^2)^2\big|} = (1-|\zeta|)^2\,\frac{(1+|\zeta|)^2x|2-\overline{\zeta}x|}{|\zeta-x|\big|2-|\zeta|^2-\overline{\zeta}x\big|}.\end{aligned}$$

Отсюда, если используем (3.24) и условие $|\zeta-x|\geqslant\varepsilon(1-x)$, то получим

$$\big(\overline{b}_2(\zeta,0)-\overline{b}_2(\zeta,x)\big)^+ \leqslant (1-|\zeta|)^2\,\frac{2^2\cdot 3}{\varepsilon(1-x)(1-x)} = \frac{12}{\varepsilon}\,\frac{(1-|\zeta|)^2}{(1-x)^2}$$

при $|\zeta-x|\geqslant\varepsilon(1-x)$.

Таким образом, рассматривая функцию Грина как продолженную, можем утверждать, что *оценка* (3.27) *выполнена при любых* $9/10 \leqslant |z| < 1$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *для всех* $\zeta \in \square(z;4)$ *с некоторой постоянной* C_ε, *зависящей только от* ε.

Шаг 3. Верхняя оценка интеграла (3.7), (3.9). При $z = x \geqslant 9/10$ для оценки интеграла разобьем его на два интеграла:

$$\begin{aligned}Q(x) &\leqslant \int_{\square(x;4)} \big(\bar{b}_2(\zeta,0) - \bar{b}_2(\zeta,x)\big)^+ \, d\nu_M(\zeta)\\ &= \left(\int_{D(x,\varepsilon(1-x))} + \int_{\square(x;4)\setminus D(x,\varepsilon(1-x))}\right) \big(\bar{b}_2(\zeta,0) - \bar{b}_2(\zeta,x)\big)^+ \, d\nu_M(\zeta)\\ &=: I_\varepsilon(x) + J_\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Здесь интегралы $I_\varepsilon(x)$ и $J_\varepsilon(x)$ определены последним равенством. Для $I_\varepsilon(x)$ получаем неравенство

$$\begin{aligned}I_\varepsilon(x) &:= \int_{D(x,\varepsilon(1-x))} \big(\bar{b}_2(\zeta,0) - \bar{b}_2(\zeta,x)\big)^+ \, d\nu_M(\zeta)\\ &\overset{(3.27)}{\leqslant} \int_{D(x,\varepsilon(1-x))} g_{\Delta_\varepsilon(x)}(\zeta,x)\, d\nu_M(\zeta) + C_\varepsilon \int_{D(x,\varepsilon(1-x))} \frac{(1-|\zeta|)^2}{(1-x)^2}\, d\nu_M(\zeta)\end{aligned}$$

при всех $9/10 \leqslant x < 1$, где постоянная C_ε зависит только от ε. Тогда по формуле Пуассона–Йенсена (2.27) в обозначении (2.2)

$$I_\varepsilon(x) \leqslant \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(x) - M(x) + \frac{C_\varepsilon}{(1-x)^2} \int_{D(x,\varepsilon(1-x))} (1-|\zeta|)^2 \, d\nu_M(\zeta) \tag{3.28}$$

для всех $9/10 \leqslant x < 1$.

Для интеграла $J_\varepsilon(x)$ мы имеем

$$\begin{aligned}J_\varepsilon(x) &:= \int_{\square(x;4)\setminus D(x,\varepsilon(1-x))} \big(\bar{b}_2(\zeta,0) - \bar{b}_2(\zeta,x)\big)^+ \, d\nu_M(\zeta)\\ &\leqslant C_\varepsilon \int_{\square(x;4)\setminus D(x,\varepsilon(1-x))} \frac{(1-|\zeta|)^2}{(1-x)^2}\, d\nu_M(\zeta).\\ &= \frac{C_\varepsilon}{(1-x)^2} \int_{\square(x;4)\setminus D(x,\varepsilon(1-x))} (1-|\zeta|)^2 \, d\nu_M(\zeta)\end{aligned} \tag{3.29}$$

Сложение (3.28) и (3.29) в обозначениях (2.2) и (3.2) дает

$$I_\varepsilon(x) + J_\varepsilon(x) \leqslant \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(x) - M(x) + C_\varepsilon b_M^{[4]}(x)$$

для всех $9/10 \leqslant x < 1$. Таким образом, из последнего неравенства и из начального в этом пункте разбиения оценки Q на оценку суммы интегралов I_ε и J_ε получаем

$$Q(z) \leqslant \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) - M(z) + C_\varepsilon b_M^{[4]}(z) \tag{3.30}$$

для всех $9/10 \leqslant |z| < 1$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Шаг 4. Доказательство пп. (Z),(U),(M) теоремы 2. При переменном усреднении(1.14) по выбираемой нами произвольной функции $\sigma \in C(\mathbb{D})$ на $\Omega = \mathbb{D}$, удовлетворяющей лишь условию (1.12) $0 < \sigma(z) < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ в силу непрерывности функции $\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}$ и явного вида функции $b_M^{[4]}$ из (2.7) *непрерывную функцию* $\sigma(z) < (1-|z|)/2$ можно подобрать столь малой, что

$$\begin{aligned} \bigl(\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z)\bigr)^{*\sigma} &\leqslant \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + 1 \quad \text{при всех } z \in \mathbb{D}, \\ \bigl(b_M^{[4]}(z)\bigr)^{*\sigma} &\leqslant \sup_{|z-w|\leqslant\sigma(z)} b_M^{[4]}(w) \leqslant \frac{4}{(1-|z|)^2} \sup_{|z-w|\leqslant(1-|z|)/2} \int_{\square(w;4)} (1-|\zeta|)^2\, d\nu_M(\zeta) \\ &\leqslant \frac{4}{(1-|z|)^2} \int_{\square(z;6)} (1-|\zeta|)^2\, d\nu_M(\zeta) = 4b_M^{[6]}(z) \end{aligned}$$

также *при всех* $z \in \mathbb{D}$. Отсюда согласно (3.30) при всех $9/10 \leqslant |z| < 1$ и указанном выборе усредняющей функции σ следует

$$\begin{aligned} M^{*\sigma}(z) + Q^{*\sigma}(z) \leqslant& M^{*\sigma}(z) + (\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + 1) - M^{*\sigma}(z) + 4C_\varepsilon b_M^{[6]}(z) \\ =& \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + 4C_\varepsilon b_M^{[6]}(z) + 1, \end{aligned} \tag{3.32}$$

а при $|z| < 9/10$ правая часть последнего неравества ограничена снизу константой, так как функция-усреднение $\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}$ непрерывна всюду на $\mathbb{D}$, а последнее слагаемое в (3.32) положительно. Кроме того, функция $M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}$ непрерывна на $\mathbb{D}$, поскольку $M, Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$ и усредняющая функция σ непрерывна. Следовательно, можно подобрать постоянную $C \geqslant 0$ столь большой, что

$$M^{*\sigma}(z) + Q^{*\sigma}(z) \leqslant \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + C_\varepsilon b_M^{[6]}(z) + C \tag{3.33}$$

уже *для всех точек* $z \in \mathbb{D}$, где $4C_\varepsilon$ переобозначено как C_ε. Отсюда по п. (Z) теоремы A при $\Omega = \mathbb{D}$ в условиях п. (Z) теоремы 2 последовательность Λ — последовательность нулей для пространства

$$\begin{aligned} \operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M^{*\sigma} + Q^{*\sigma}) \subset& \operatorname{Hol}\bigl(\mathbb{D}; \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + C_\varepsilon b_M^{[6]}(z) + C\bigr) \\ =& \operatorname{Hol}\bigl(\mathbb{D}; \mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) + C_\varepsilon b_M^{[6]}(z)\bigr). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично при $\Omega = \mathbb{D}$ из пп. (U) и (M) теоремы A следуют пп. (U) и (M) теоремы 2.

Теорема доказана. •

§ 4. Радиальные версии теоремы 2

Пусть $D \subset \mathbb{D}$ подобласть в $\mathbb{D}$. В соответствии с обозначением (1.1) естественно рассматривать радиальные проекции гармонической меры в точке 0

$$\omega_D^{\mathrm{rad}}(t) := \omega_D\bigl(0, D(t) \cap D\bigr). \tag{4.1}$$

Сначала мы дадим форму теоремы 2 при общем радиальном весе M, а затем приведем несколько результатов, вытекающих из теоремы 2 для некоторых конкретных весов M.

Теорема 3. *Пусть* $M\colon [0,1) \to [0,+\infty)$ *— положительная непрерывная в нуле возрастающая выпуклая от логарифма на* $(0,1)$ *функция, т. е. композиция* $M\circ\exp$ *выпукла на* $[-\infty,0)$, *а* M'_- *— ее левая производная и*

$$\int_0^1 M(t)\,dt<+\infty. \tag{4.2}$$

Продолжим ее на $\mathbb{D}$ *как радиальную функцию* $M(z)\equiv M(|z|)$, $z\in\mathbb{D}$, *сохранив для продолженной функции прежнее обозначение* M.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}\subset\mathbb{D}$ *— последовательность точек и* $0\notin\Lambda$, *а* f_Λ *— некоторая голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция с последовательностью нулей* $\operatorname{Zero}_{f_\Lambda}=\Lambda=\{\lambda_k\}$. *Тогда*

(Z_r) *если при некотором* $a<1$ *в обозначении* $\mathcal{U}^d_{D(a)}(\mathbb{D})=:\mathcal{U}^d_{D(a)}$ *выполнено хотя бы одно из следующих трех соотношений*

$$\sup_{D\in\mathcal{U}^d_{D(a)}}\biggl(\int_{\mathbb{D}}\log\bigl|f_\Lambda(z)\bigr|\,d\omega_D(0,z)-\int_0^{1^-}M(t)\,d\omega_D^{\mathrm{rad}}(t)\biggr)<+\infty, \tag{4.3f}$$

$$\sup_{D\in\mathcal{U}^d_{D(a)}}\biggl(\sum_k g_D(\lambda_k,0)-\int_0^{1^-}\Bigl(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g_D(te^{\theta},0)\,d\theta\Bigr)\,d\bigl(tM'_-(t)\bigr)\biggr)<+\infty, \tag{4.3g}$$

$$\sup_{D\in\mathcal{U}^d_{D(a)}}\biggl(\sum_k g_D(\lambda_k,0)-\int_0^{1^-}M(t)\,d\omega_D^{\mathrm{rad}}(t)\biggr)<+\infty, \tag{4.3h}$$

то Λ *— последовательность нулей для для пространства*

$$\operatorname{Hol}\bigl(\mathbb{D};M+Cb_M^{[6]}\bigr),\quad C \text{ —постоянная,} \tag{4.4}$$

с радиальной функцией

$$b_M^{[6]}(r):=\frac{6}{1-r}\int_{\bigl(r-6(1-r)\bigr)^+}^{1^-}(1-t)\,dM(t)\,; \tag{4.5}$$

(U_r) *если* Λ *— подпоследовательность нулей для* $\operatorname{Hol}(\mathbb{D};M)$, *то* Λ *— последовательность нулей для пространства* (4.4)*;*

(M_r) *если* $f=g/q$ *— мероморфная функция на* $\mathbb{D}$, $g,q\in\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$, *и существует постоянная* $a<1$ *такая, что*

$$\sup_{D\in\mathcal{U}^d_{D(a)}}\biggl(\int_{\mathbb{D}}\log\max\bigl\{|g(z)|,|q(z)|\bigr\}\,d\omega_D(0,z)-\int_0^{1^-}M(t)\,d\omega_D^{\mathrm{rad}}(t)\biggr)<+\infty \tag{4.6}$$

или же обе функции g *и* q *принадлежат пространству* $\operatorname{Hol}(\mathbb{D};M)$, *то найдутся функции* g_0 *и* q_0 *из пространства* (4.4) *без общих нулей, с которыми по-прежнему имеем представление* $f=g_0/q_0$ *на* $\mathbb{D}$.

Доказательство. По условию теоремы 3 функция M — возрастающая положительная функция, выпуклая от логарифма на $(0,1)$. Это значит, что функция $M(z)=M(|z|)$ непрерывная и субгармоническая на $\mathbb{D}$. Следовательно, существует положительная левая производная M'_- от $M(t)$, $t\in(0,1)$. Кроме того, функция $tM'_-(t)$ возрастающая на $(0,1)$ и вычисление лапласиана от M дает представление

$$d\nu_M(z)=\frac{1}{2\pi}\,d\theta\otimes\, d(tM'_-(t)),\quad z:=te^{i\theta},\ 0\leqslant t<1, \tag{4.7}$$

для плотности меры Рисса ν_M (в смысле теории распределений) субгармонической функции M. При этом ввиду радиальности функции M

$$\int_{\mathbb{D}} M(z)\,d\omega_D(0,z)=\int_0^{1^-} M(t)\,d\omega_D^{\mathrm{rad}}(t), \tag{4.8}$$

а (4.2) в силу возрастания M дает соотношение $\lim_{t\to 1^-}(1-t)M(t)=0$ и после интегрирования по частям обеспечивает сходимость интеграла

$$\int_0^{1^-}(1-t)\,dM(t)<+\infty. \tag{4.9}$$

Отсюда

$$\int_r^{1^-}(1-t)\,dM(t)=\int_r^{1^-}(1-t)M'_-(t)\,dt \tag{4.10i}$$

$$\geqslant rM'_-(r)\int_r^{1^-}\frac{1-t}{t}\,dt\geqslant rM'_-(r)\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{2}\,(1-r)^2=\frac{1}{2}\,M'_-(r)(1-r)^2, \tag{4.10r}$$

откуда ввиду условия (4.9)

$$\lim_{r\to 1-}M'_-(r)(1-r)^2=0. \tag{4.11}$$

Для определяющего пространство (3.5) в теореме 2 второго слагаемого (3.2) при $z=re^{i\theta}$, $6/7\leqslant r<1$, в нашем случае ввиду радиальности функции M имеем

$$\begin{aligned}
b_M^{[6]}(z)&=b_M^{[6]}(r)\\
&\overset{(3.1),\,(4.7)}{=}\frac{1}{(1-r)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\arcsin 6(1-r)}^{\arcsin 6(1-r)}\left(\int_{r-6(1-r)}^{1^-}(1-t)^2\,d(tM'_-(t))\right)d\theta\\
&\qquad\leqslant\frac{3}{1-r}\int_{r-6(1-r)}^{1-}(1-t)^2\,d(tM'_-(t)).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что интегрирование по частям с учетом (4.11) и положительности функции $tM'_-(t)$ дает как оценку

$$\begin{aligned}
b_M^{[6]}(z)&\leqslant\frac{6}{1-r}\,\int_{r-6(1-r)}^{1^-}tM'_-(t)(1-t)\,dt\\
&\frac{6}{1-r}\,\int_{r-6(1-r)}^{1^-}M'_-(t)(1-t)\,dt\overset{(4.10\mathrm{i})}{=}\frac{6}{1-r}\,\int_{r-6(1-r)}^{1^-}(1-t)\,dM(t),
\end{aligned}$$

позволяющую переопределить функций $b_M^{[6]}$ соотношением (4.5), так и выполнение условия (3.4) теоремы 2.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$. Функция M возрастающая и радиальная. Следовательно,

$$A_M^{[\varepsilon]}(z) \leqslant M\bigl(r+\varepsilon(1-r)\bigr), \quad r=|z|. \tag{4.12}$$

По теореме о среднем значении найдется точка r_ε такая, что $r \leqslant r_\varepsilon \leqslant r + \varepsilon(1-r)$ и

$$\begin{aligned} M\bigl(r+\varepsilon(1-r)\bigr) - M(r) &\leqslant M'_-(r_\varepsilon)\cdot\varepsilon(1-r) = M'_-(r_\varepsilon)(1-r_\varepsilon)\cdot\varepsilon\frac{1-r}{1-r_\varepsilon} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,M'_-(r_\varepsilon)(1-r_\varepsilon) \overset{(4.10)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{2}{1-r_\varepsilon}\int_{r_\varepsilon}^{1-}(1-t)\,dM(t) \\ &\overset{(4.9)}{\leqslant} \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\,\frac{1}{1-r}\int_r^{1-}(1-t)\,dM(t). \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (4.12), в рассматриваемом случае

$$\operatorname{Hol}\bigl(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_M^{[6]}\bigr) = \operatorname{Hol}\bigl(\mathbb{D}; M + C_\varepsilon b_M^{[6]}\bigr),$$

где функция $b_M^{[6]}$ имеет вид (4.5), а C_ε — постоянная, зависяшая только от ε. Следовательно, теорема 3 — специальный случай теоремы 2. •

Замечание 1. Вообще говоря, в теореме 3 нет необходимости требовать от положительной возрастающей функции M выпуклости от логарифма на всем интервале $(0,1)$, а достаточно предполагать ее таковой на интервале $[d,1)$ где $0<d<1$ — произвольное число. Если преобразовать функцию M в функцию

$$M_d(z) = \begin{cases} M(d), & \text{если } |z|<d, \\ M(z), & \text{если } d\leqslant |z|<1, \end{cases}$$

которая уже будет субгармонической с плотность меры Рисса, равной (4.7) при $d<|z|<1$ и с дополнительной плотностью $\frac{1}{2\pi}M'_+(d)\,d\theta$, сосредоточенной на окружности $\partial D(d)$, где M'_+ — правая производная по радиусу. Теорема 3 при этом остается в силе.

Напомним [8, определение 5], что мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ с компактным носителем в круге $\mathbb{D}$ называется *мерой Аренса–Зингера* (на $\mathbb{D}$ для точки 0), если

$$h(0) = \int_{\mathbb{D}} h\,d\mu$$

для всех гармонических в $\mathbb{D}$ функций h. Через $\mathcal{AS}(\mathbb{D})$ обозначаем класс всех мер Аренса–Зингера.

Примерами мер Аренса–Зингера для $0\in\mathbb{D}$ могут служить все гармонические меры $\omega_D(0,\cdot)$ относительно областей $D \Subset \mathbb{D}$ в точке $0\in D$.

Субгармоническую в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функцию V называем *потенциалом Аренса–Зингера* (на $\mathbb{D}$ с полюсом в точке 0) [8, определение 6], если она удовлетворяет двум условиям:

(1) $V \equiv 0$ на $\mathbb{C} \setminus \bigl(K \bigcup \{0\}\bigr)$ для некоторого $K \Subset \mathbb{D}$ (*финитность* V);

(2) $\limsup\limits_{\zeta \to 0} \dfrac{V(\zeta)}{-\log|\zeta|} \leqslant 1$ (*нормировка в нуле для* V).

Класс всех таких потенциалов Аренса–Зингера обозначаем через $\mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})$.

Примерами потенциалов Аренса–Зингера могут служить все продолженные функции Грина $g_D(\cdot, 0)$ для областей $D \Subset \mathbb{D}$ с полюсом в точке 0.

При очень простом условии на радиальный вес M теорема 3 ниже приобретает форму критерия:

Теорема 4. *Пусть радиальная функция M такая же, как в теореме 3, равно как и последовательность $\Lambda \not\ni 0$, и функция $f_\Lambda \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ с $\mathrm{Zero}_\Lambda = \Lambda$. Тогда при дополнительном условии*

$$\int_r^{1^-} (1-t)\, dM(t) = O(1-r) \quad \textit{при} \quad r \to 1^-, \quad t, r \geqslant 0, \tag{4.13}$$

справедливы следующие утверждения:

(Z_r^0) *любое из трех условий (4.3) эквивалентно каждому из соотношений*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{AS}(\mathbb{D})} \left(\int_{\mathbb{D}} \log\bigl|f_\Lambda(z)\bigr|\, d\mu(z) - \int_0^{1^-} M(t)\, d\mu^{\mathrm{rad}}(t) \right) < +\infty, \tag{4.14f}$$

$$\sup_{V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int_0^{1^-} \Bigl(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(te^{\theta})\, d\theta \Bigr)\, d\bigl(tM'_-(t)\bigr) \right) < +\infty, \tag{4.14g}$$

$$\sup_{V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int_{0^+}^{1^-} M(t)\, d\mu_V^{\mathrm{rad}}(t) \right) < +\infty, \tag{4.14h}$$

где $\mu_V \in \mathcal{AS}(\mathbb{D})$ — мера Рисса функции Аренса–Зингера V, но самое главное эквивалентно тому, что Λ — последовательность нулей для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$*;*

(U_r^0) Λ *— подпоследовательность нулей для* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$*, если и только если* Λ *— последовательность нулей для того же* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$*;*

(M_r^0) *если f — мероморфная функция на $\mathbb{D}$, то следующие четыре утверждения попарно эквивалентны:*

(a) *для некоторого представления $f = g/q$ с функциями $g, q \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ справедливо соотношение*

$$\sup_{\mu \in \in \mathcal{AS}(\mathbb{D})} \left(\int_{\mathbb{D}} \log\max\bigl\{|g(z)|, |q(z)|\bigr\}\, d\mu(z) - \int_0^{1^-} M(t)\, d\mu^{\mathrm{rad}}(t) \right) < +\infty, \tag{4.15}$$

(b) *при некотором представлении $f = g/q$ с функциями $g, q \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ существует постоянная $a < 1$, для которой выполнено (4.6),*

(c) *существует представление* $f = g/q$ *с функциями* $g, q \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$,

(d) *найдутся функции* $g_0, q_0 \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$ *без общих нулей, с которыми имеет место представление* $f = g_0/q_0$ *на* $\mathbb{D}$.

Доказательство. Эквивалетность трех условий (4.3) — следствия классической формулы Пуассона–Йенсена и вида (4.7) меры Рисса ν_M. Эквивалентость трех условий (4.14) — аналогичное следствие обобщения формулы Пуассона–Йенсена для потенциалов и мер Аренса–Зингера [17, Предложение 1.2]. Кроме того, три условия (4.3) — частный случай соответственно трех условий (4.14), поскольку функции Грина и меры Йенсена — специальные виды соответственно потенциалов и мер Аренса–Зингера и Йенсена. По теореме 3, п. (Z_r), любое из трех условий (4.3) влечет за собой то, что Λ — последовательность нулей для пространства $\mathrm{Hol}\bigl(\mathbb{D}; M + Cb_M^{[6]}\bigr)$ из (4.4), где для радиальной функции $b_M^{[6]}$ из (4.5) имеем

$$b_M^{[6]}(r) := 6\, \frac{1 - \bigl(r - 6(1-r)\bigr)^+}{1-r}\, \frac{1}{1 - \bigl(r - 6(1-r)\bigr)^+} \int_{\left(r-6(1-r)\right)^+}^{1^-} (1-t)\, dM(t),$$

что, согласно условию (4.13), при $r < 1$, достаточно близких к 1, для некоторой постоянной C выполнена оценка

$$b_M^{[6]}(r) \leqslant 6\, \frac{7(1-r)}{1-r}\, C = 42C. \tag{4.16}$$

Таким образом, пространство $\mathrm{Hol}\bigl(\mathbb{D}; M + Cb_M^{[6]}\bigr)$ в данном случае — это $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M + 42C) = \mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$.

Наконец, если Λ — последовательность нулей для $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$, то, как показано в [8, теорема 1, п. (zn1)], выполнено (4.14f).

Утверждение (Z_r^0) доказано.

Утверждение (U_r^0) ввиду (4.16) — прямое следствие п. (U_r) теоремы 3.

Докажем последний п. (M_r^0). Импликация (a) $\Longrightarrow$ (b) очевидна, так как гармонические меры — это меры Аренса–Зингера. Из (b) по теореме 3, п. (M_r), ввиду (4.16) следует (d). Импликации (d) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a) очевидны. •

§ 5. Примеры: слабые аналоги условий Коренблюма–Сейпа

Напомним сначала замечательные по своей определенной завершенности результаты Б. Коренблюма [18], а затем К. Сейпа [19]–[21], о распределении нулей в пространствах (здесь $\gamma \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $z \in \mathbb{D}$; $\log^\gamma x := \bigl(\log x\bigr)^\gamma$)

$$K(\gamma,\alpha) \overset{[21]}{:=} \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \alpha M_\gamma), \quad M_\gamma\colon z \longmapsto \log^\gamma \frac{1}{1-|z|}\,, \tag{5.1K}$$

$$A^{-\alpha} := K(1,\alpha), \quad A^{-\infty} := \bigcup_{\alpha>0} A^{-\alpha} \overset{(1.11)}{=} \mathrm{Alg}^\infty_{M_1}(\mathbb{D}) \tag{5.1A}$$

$$A_+^{-\alpha} \overset{[13]}{:=} \bigcap_{\alpha'>\alpha} A^{-\alpha'}, \quad A_-^{-\alpha} \overset{[13]}{:=} \bigcup_{\alpha'<\alpha} A^{-\alpha'}. \tag{5.1α}$$

Б. Коренблюм ввел в работе [18] понятие плотности, в некотором смысле обобщающее классическое условие Бляшке, и нашел полное геометрическое описание последовательностей нулей для алгебры $A^{-\infty}$. Е. Беллер [11, п. 2, следствие 1] доказал, что для любого $\alpha > 0$, класс последовательностей нулей для $A^{-\alpha}$ совпадает с классом подпоследовательностей нулей для $A^{-\alpha}$. Д. Паскуас [22], а также Х. Бруна и Х. Массанеда [23] обобщили результат Б. Коренблюма на весовые алгебры $\mathrm{Alg}^\infty_M(\mathbb{D})$ и даже на алгебры функций многих комплексных переменных в единичном шаре, когда $M > 0$ — радиальная весовая функция, "слабо возрастающая" в том смысле [23, п. III.1], что выполнены три условия

(a) $\lim_{r\to 1^-} M(r) = +\infty$;

(b) функция $r \longmapsto (1-r)M(r)$ — убывающая на $[0,1)$;

(c) $\sup_{r\in[0,1)} \dfrac{M(1-r^2)}{M(1-r)} < +\infty$.

В обозначении $f^{\circ n} := \underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{n \text{ раз}}$, $n \in \mathbb{N}$, для n-кратной композиции функции f примерами слабо возрастающих радиальных весов на $[0,1)$, выпуклых относительно log, могут служить функции

(i) $M\colon r \longmapsto \log^\gamma \dfrac{e}{1-r}\,, \quad \gamma > 0, \quad r \in [0,1)$,

(ii) $M\colon r \longmapsto \log^{\circ n}\Bigl(\dfrac{A}{1-r}\Bigr), \quad n \in \mathbb{N}, \quad A \geqslant \exp^{\circ n}(1), \quad r \in [0,1)$,

но в силу условия (c) *не подходят* выпуклые относительно log функции-мажоранты

$$M\colon r \longmapsto \frac{1}{(1-r)^\beta}\,, \quad r \in [0,1), \tag{5.2}$$

каково бы не было значение числа $\beta \in (0,1)$, хотя эти весовые функции и удовлетворяют условиям (a)–(b).

В [19]–[20] К. Сейп значительно усовершенствовал метод Б. Коренблюма и получил подобное полное описание последовательностей нулей для пространств $A_+^{-\alpha}$ и $A_-^{-\alpha}$ и даже несколько более сильные результаты. В совместной монографии Х. Хеденмальма, Б. Кореблюма и К. Жу [13, гл. 4] содержатся детальный анализ и доказательства этих результатов К. Сейпа вместе с их усовершенствованными интерпретациями. Наконец, в [21] К. Сейпом дано законченное геометрическое описание последовательностей нулей для пространств $K(\gamma,\alpha)$ при значении $\gamma<1$.

В целях дальнейших аналогий остановимся здесь на основных результатах К. Сейпа подробнее.

Пусть F — конечное множество на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$, I_j — множество дополнительных к F дуг на $\partial\mathbb{D}$, $|I_j|$ — длина дуги I_j. Положим

$$\widehat{\kappa}(F;\gamma):=\sum_j \frac{|I_j|}{2\pi}\,\log^{\gamma}\frac{2\pi}{|I_j|} \tag{5.3}$$

— *γ-характеристика Берлинга–Карлесона множества F* [13, п. 4.2].

Нормированное угловое расстояние на $\partial\mathbb{D}$ определяется как $d(e^{it},e^{is}):=|t-s|/\pi$, где предполагается, что $|t-s|\leqslant\pi$. Для конечного подмножества $F\subset\partial\mathbb{D}$ определяется подмножество единичного круга

$$G_F:=\bigl\{z\in\overline{\mathbb{D}}\colon 1-|z|\geqslant d(z/|z|,F)\bigr\}. \tag{5.4}$$

Объединением результатов из [19, теорема], [20, теорема 1], [21, теорема 1], [13, теорема 4.15, следствие 4.16] является

Теорема S. *Последовательность $\Lambda=\{\lambda_k\}\in\mathbb{D}$ является последовательностью нулей*

(s0) *для пространства $K(\gamma,\alpha)$ с $0\leqslant\gamma<1$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_F\Biggl(\sum_{\lambda_k\in G_F}\bigl(1-|\lambda_k|\bigr)-\alpha\,\widehat{\kappa}(F;\gamma)\Biggr)<+\infty, \tag{5.5}$$

где супремум берется по всем конечным подмножествам $F\subset\partial\mathbb{D}$;

(s1) *для пространства $A_+^{-\alpha}$ (соответственно $A_-^{-\alpha}$), если и только если*

$$\limsup_{\widehat{\kappa}(F;1)\to+\infty}\frac{\sum_{\lambda_k\in G_F}\bigl(1-|\lambda_k|\bigr)}{\widehat{\kappa}(F;1)}\leqslant\alpha\quad(\textit{соответственно}<\alpha). \tag{5.6}$$

Кроме того, при $\gamma>1$ справедливо равенство[2]

$$\begin{aligned}&\inf\Bigl\{\alpha>0\colon \sup_{F\,\subset\,\partial\mathbb{D}\,-\,\text{конечное}}\Bigl(\sum_{\lambda_k\in G_F}\bigl(1-|\lambda_k|\bigr)-\alpha\widehat{\kappa}(F;\gamma)\Bigr)<+\infty\Bigr\}\\ &=\inf\bigl\{\alpha>0\colon\ \Lambda-\textit{последовательность нулей для } K(\gamma,\alpha)\bigr\}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Последнее равенство (5.7) теоремы S отмечено в [21, замечание 2].

Функции $M_\gamma(r)$ из (5.1K) и функции из (i) и (ii) выше, а также из (5.2) выпуклы относительно log на $[0,1)$ при любом $A\geqslant\exp^{\circ(n-1)}(1)$. Для этих функций при любых значениях $0\leqslant\gamma\leqslant1$ и только при них, а также при

[2] По определению $\inf\varnothing=+\infty$ и $\sup\varnothing=-\infty$.

любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие (4.13) теоремы 4. По аналогии с характеристикой Берлинга–Карлесона (5.3) конечных множеств на $\partial\mathbb{D}$ для каждой функции Аренса–Зингера $V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})$ и весовой радиальной и выпуклой относительно log на $[0,1)$ функции M введем обобщенную характеристику Берлинга–Карлесона функции V относительно веса M, которую в свете результатов Б. Коренблюма и К. Сейпа представляется уместным определить по правилу (см. (4.7), (4.3g) и (4.14g))

$$\widehat{\kappa}(V;M) := \int_0^{1-} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(te^{i\theta})\,d\theta\right) d\bigl(tM'_-(t)\bigr). \tag{5.8}$$

Так, γ-характеристика Берлинга–Карлесона конечного подмножества F на $\partial\mathbb{D}$ из (5.3) близка к обобщенной характеристике Берлинга–Карлесона продолженной функции Грина $g_{G_F}(\cdot,0)$ с полюсом в нуле относительно функции M_γ из (5.1K), т. е. из (i), что в данном случае одно и то же.

Если при $M = M_1\colon r \mapsto \log\frac{1}{1-r}$ для краткости положить $\widehat{\kappa}(V) := \widehat{\kappa}(V;M)$, то из теоремы 4 сразу получаем критериальное развитие части (s1) с $\gamma = 1$ теоремы Сейпа S, но со значительно большим объемом тестовых проверок:

Теорема 5. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{D}$, $k = 1,2,\dots$, $0 \notin \Lambda$, *и* $0 \leqslant \alpha < +\infty$. *Тогда следующие три утверждения попарно эквивалентны:*

[Z] *последовательность* Λ — *последовательность нулей для* $A^{-\alpha}$*;*

[G] $$\sup_{D \in \mathcal{U}^d_{D(a)}} \left(\sum_k g_D(\lambda_k,0) - \alpha\,\widehat{\kappa}\bigl(g_D(\cdot,0)\bigr)\right) < \infty \text{ для некоторого } a<1;$$

[AS] $$\sup_{V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \alpha\,\widehat{\kappa}(V)\right) < \infty.$$

С целью избежать длинных формулировок следствий из теорем 3 и(или) 4, подобных теореме 5, для явных радиальных весовых функций M вида (i), (ii), (5.2) и им подобных ограничимся здесь таблицей. Из нее легко видеть, чем ограничена сверху дополнительная функция $b_M^{[6]}$ из (4.5) *в левой окрестности* 1 для различных явных весов M, удовлетворяющих условиям теоремы 3.

№ ссылки	*Вес* M	*Оценка на* $b_M^{[6]}(r)$
(5.1K) или (i)	$M(r) = M_\gamma(r) \equiv \log^\gamma \dfrac{1}{1-r}$	$\leqslant 43\gamma \log^{(\gamma-1)^+} \dfrac{1}{1-r}$
(ii)	$M(r) \equiv \log^{\circ n}\Bigl(\dfrac{A}{1-r}\Bigr)$, $A \geqslant \exp^{\circ n}(1)$	$\leqslant 1$
(5.2)	$M(r) \equiv \dfrac{1}{(1-r)^\beta}$, $0<\beta<1$	$\leqslant \dfrac{42}{1-\beta}\,\dfrac{1}{(1-r)^\beta}$

§ 6. Вариант условий Льюкинга

Одна из версий подхода к описанию последовательностей нулей в пространствах Бергмана и некоторых их обобщений [13], включая пространства

$A^{-\alpha}$, была предложена Д. Льюкингом в работе [24]. В 1996 г. он дал критерий нулевой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{D}$, в частности, и для пространства $A^{-\alpha}$ в терминах существования гармонической миноранты для специальной тестовой функции, построенной по последовательности Λ. Этот подход для "слабо возрастающих весов" получил развитие в совместной статье О. Бласко, А. Кукурики и М. Новак [25], электронный вариант которой вышел еще в 2002 г. Мы даем вариант этих результатов только для пространств $A^{-\alpha}$ без использования гипотетической гармонической миноранты.

Теорема 6. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{D}$, $k = 1, 2, \dots$, $0 \notin \Lambda$ и $0 \leqslant \alpha < +\infty$. Тогда следующие три утверждения попарно эквивалентны:*

[ZL] *последовательность Λ — последовательность нулей для $A^{-\alpha}$;*

[GL] *существует постоянная $a < 1$, при которой*

$$\sup_{D \in \mathcal{U}^d_{D(a)}} \left(\sum_k \bigl(1 - |\lambda_k|^2\bigr)^2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{g_D(\zeta, 0)\, dm(\zeta)}{|1 - \lambda_k \overline{\zeta}|^4} \right) - \alpha\, \widehat{\kappa}\bigl(g_D(\cdot, 0)\bigr) \right) < \infty\,;$$

[ASL] $$\sup_{V \in \mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})} \left(\sum_k \bigl(1 - |\lambda_k|^2\bigr)^2 \Bigl(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{V(\zeta)\, dm(\zeta)}{|1 - \lambda_k \overline{\zeta}|^4} \Bigr) - \alpha\, \widehat{\kappa}(V) \right) < \infty.$$

Набросок доказательства. Очевидное включение класса всех продолженных функций Грина $g_D(\cdot, 0)$, $D \Subset \mathbb{D}$, в класс потенциалов Аренса–Зингера $\mathcal{P}_{AS}(\mathbb{D})$ дает импликацию [ASL]$\Longrightarrow$[GL].

Следуя Д. Льюкингу, положим

$$K_\Lambda(z) = \frac{|z|^2}{2} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \frac{\bigl(1 - |\lambda_k|^2\bigr)^2}{|1 - \lambda_k \overline{z}|^2}\,, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{6.1}$$

Здесь K_Λ — субгармоническая непрерывная функция на $\mathbb{D}$ и вычисления дают

$$\begin{aligned} \Delta K_\Lambda(z) &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\, K_\Lambda(z) \\ &= 2 \sum_k \bigl(1 - |\lambda_k|^2\bigr)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\, \frac{z \overline{z}}{(1 - \lambda_k \overline{z})(1 - \overline{\lambda}_k z)} \\ &= 2 \sum_k \bigl(1 - |\lambda_k|^2\bigr)^2 \frac{1}{|1 - \lambda_k \overline{z}|^4}\,. \end{aligned}$$

Отсюда для меры Рисса ν_{K_Λ} субгармонической функции K_Λ имеем

$$d\nu_{K_\Lambda}(z) = \frac{1}{\pi} \sum_k \frac{\bigl(1 - |\lambda_k|^2\bigr)^2}{|1 - \lambda_k \overline{z}|^4}\, dm(z), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{6.2}$$

Теорема L ([24, теорема A, (b)]). *Последовательность Λ — последовательность нулей для $A^{-\alpha}$, если и только если для $M_1(t) \equiv \log \dfrac{1}{1-t}$ из (5.1K) с $\gamma = 1$ функция $M_1 - K_\Lambda$ допускает гармоническую миноранту.*

Из этой теоремы Д. Льюкинга и работы [8, предложение 3.6] легко следует импликация [ZL]$\Longrightarrow$[ASL].

Для доказательства оставшейся импликации [GL]$\Longrightarrow$[ZL] нам придется вернуться к главному результату нашей работы [8, § 2, п. 2.2, основная теорема]. В данном случае условие [GL] есть ни что иное, как частный случай пункта (h1) указанной основной теоремы из [8], но с функцией K_Λ вместо функции u и соответственно мерой Рисса (6.2), а также с функцией M_1 вместо M с мерой Рисса, определенной по правилу

$$d\nu_{M_1}(z) = \frac{1}{2\pi}\,d\theta \otimes \frac{dt}{(1-t)^2}\,, \quad z = te^{i\theta} \in \mathbb{D},\ 0 \leqslant r < 1. \tag{6.3}$$

При этом заключение основной теоремы из [8] с учетом [8, п. 1.3, замечание 1] утверждает, что при условии (h1) функция $M+Q-u$ с функцией $Q := Q_k^\nu$ (см. (1.10)) из формулировки теоремы A, которая в данном случае совпадает с $M_1 + Q - K_\Lambda$, допускает гармоническую миноранту. В нашем конкретном случае $\nu = \nu_{M_1}$, а субгармоническое ядро k — это ядро Бомаша $\overline{b}_2$. Но вся основная аналитическая деятельность в § 3 заключалась именно в оценке сверху функции $Q(z)$ величиной

$$\mathrm{A}_M^{[\varepsilon]}(z) - M(z) + C_\varepsilon b_M^{[4]}(z)$$

(см. (3.30)), где функция $b_M^{[4]}$ определена в (3.2) и $M = M_1$. В нашем случае из конкретного вида функции M_1 и второй строки таблицы в конце § 5 для $\gamma = 1$ получаем ограниченность сверху функции Q всюду в $\mathbb{D}$. Следовательно, функция $M_1 - K_\Lambda$ допускает гармоническую миноранту на $\mathbb{D}$. По теореме L это и означает выполнение [ZL]. $\bullet$

Замечание 2. Слагаемые в первых суммах из [GL] и [ASL] — это значения в точках λ_k преобразования Березина (см. [13, Ch. 2]) соответственно функций Грина и потенциалов Аренса–Зингера.

Замечание 3. В теоремах 5, 6 в пп. [G] и [GL] мы можем допускать, что области $D \subset \mathbb{D}$, построенные как конечные объединения кругов, имеют конечное число общих точек с окружностью $\partial\mathbb{D}$, так как интегралы (5.8) при $M = M_1$ с подынтегральным выражением $V = g_D(\cdot, 0)$ в таком случае конечны. Кроме того, во всех формулировках теорем система областей $U^d_{D(a)}$ может быть заменена на произвольную *регулярную оптимально исчерпывающую систему областей в* $\mathbb{D}$ *с любым центром* $S_0 \Subset \mathbb{D}$ в смысле [8, определение 1].

Дальнейшими целями видятся иллюстрации возможностей метода выметания из [8] в комбинации с результатами статьей [26] и [27] для достаточно простых алгебр функций $\mathrm{Alg}^\infty_M(\mathbb{D})$ в предположении положительности и радиальности M на $\mathbb{D}$. Это направление можно рассматривать как некоторую вариацию на тему части статьи Ф. А Шамояна [28, теорема 2.2]. Последующие этапы исследований предполагают также прямое применение результатов из [8] и [27] к функциям, голоморфным в конечносвязных областях.

Дальнейшими целями видятся попытки обобщения результатов данной статьи на основе исследования ядер Бомаша $\bar{b}_p$ при $3 \leqslant p \leqslant 6$ в духе § 3 оказались на удивление сложными и малорезультативными — во всяком случае, в нашем исполнении. Но даже в случае $p = 3$ такое изучение представляется интересным, поскольку нам неизвестно, например, существует ли полное описание последовательностей нулей для алгебры $\mathrm{Alg}_M^\infty(\mathbb{D})$ с функцией M из (5.2) с $\beta = 1$. А для субгармонической функции $1/(1 - |z|)$, $z \in \mathbb{D}$, именно ядро Бомаша $\bar{b}_3$ является подходящим.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность рецензенту и редакторам за важные и полезные замечания.

Список литературы

[1] Л. Шварц, *Анализ. Т. I,* Наука, М., 1967.

[2] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции,* Мир, М., 1980.

[3] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции,* Мир, М., 1984.

[4] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p,* Мир, М., 1984.

[5] Хейман У., *Мероморфные функции*, Мир, М., 1966.

[6] Tsuji M., *Potential theory in modern function theory,* Chelsea Publ. Co., N.Y., 1975.

[7] Ransford T. J., *Potential Theory in the Complex Plane* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[8] Б. Н. Хабибуллин, “ Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты”, *Матем. сб.,* **198**:2 (2007), 121-160.

[9] G. Bomash, “A Blashke-type product and random zero sets for Bergman spaces”, Arkiv für Math., **30** (1992), 45–60.

[10] E. Beller, C. Horowitz, “Zero sets and random zero sets in certain function spaces”, *J. Analyse Math.,* **64** (1994), 203–217.

[11] E. Beller, “Factorization for non-Nevanlinna classes of analytic functions”, *Israel J. Math.,* **27**:3–4 (1977), 320–330.

[12] A. Borichev, H. Hedenmalm, “Harmonic functions of maximal growth: invertibility and cyclicity in Bergman spaces”, *J. Amer. Math. Soc.,* 1997. **10**:4 (1997), 761–796.

[13] Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K., *Theory of Bergman spaces,* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 199, New York, 2000.

[14] Yu. I. Lyubarskii, K. Seip, "A uniqueness theorem for bounded analytic functions", Bull. London Math. Soc., **29** (1997), 49–52.

[15] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций,* ГИТТЛ, М.–Л., 1950.

[16] В. Я. Эйдерман, Маттс Эссéн, "Теоремы единственности для аналитических и субгармонических функций", *Алгебра и анализ*, **14**:6 (2002), 1–88.

[17] Б. Н. Хабибуллин, "Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций", *Сиб. матем. ж.,* **4**:4 (2003), 905–925.

[18] B. Korenblum, "An extension of the Nevanlinna theory", *Acta Math.,* **135** (1975), 187–219.

[19] K. Seip, "On a theorem of Korenblum" *Ark. Math.,* **32** (1994), 237–243.

[20] K. Seip, "On Korenblum's density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$", *J. Analyse Math.,* **67** (1995), 307–322.

[21] K. Seip, "An extention of the Blaschke condition", *J. London Math. Soc.,* **51** (1995), 545–558.

[22] D. Pascuas, *Zeros interpolació en espais de funcions holomorfes del disc unitat,* Tesi doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona, 1988.

[23] J. Bruna, X. Massaneda, "Zero sets of holomorphic functions in the unit ball with slow growth", *J. Analyse Math.,* **66** (1995), 217–252.

[24] D. Luecking, "Zero sequences for Bergman spaces", *Complex Variables,* **30** (1996), 345–362.

[25] O. Blasco, A. Kukuryka, M. Nowak, "Luecking's condition for zeros of analytic functions", *ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA,* Lublin – Polonia, **LVIII**:A (2004), 1–15.

[26] Л. Ю. Чередникова, "Последовательности неединственности для весовых алгебр голоморфных функций в единичном круге", *Матем. заметки,* **77**:5 (2005), 775–787.

[27] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова " Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II", *Алгебра и анализ,* **20**:1 (2008), 190–236.

[28] Ф. А. Шамоян "Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста", *Изв. АН Арм. ССР. Математика,* **XIII**:5–6 (1978), 405–422.

ФГОУ ВПО Башкирский государственный аграрный университет
450001, г. Уфа, ул. 50 лет Октября, д. 34
Кудашева Елена Геннадьевна
E-mail: lena_kudasheva@mail.ru

ГОУ ВПО Башкирский государственный университет
450074, Уфа, ул. Фрунзе, 32
Хабибуллин Булат Нурмиевич

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
450077, Уфа, ул.Чернышевского, 112
Хабибуллин Булат Нурмиевич
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru
Web-site: http://math.bsunet.ru/khb