

Е. Г. Кудашева, Б. Н. Хабибуллин
**О близости целых функций с близкими
последовательностями нулями**¹

Башкирский государственный аграрный университет, Башкирский
государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: khabib-bulat@mail.ru ; Web-site: <http://math.bsunet.ru/khb>

С 1950-х гг. в работах Б. Я. Левина, А. А. Гольдберга, И. Ф. Красичкова-Терновского, А. Ф. Гришина, В. С. Азарина, Б. Н. Хабибуллина и многих других исследовалось изменение роста целых функций при сдвигах ее нулей в связи с различными приложениями теории целых функций одной переменной. Как правило, этот вопрос изучался для различных классов целых функций *конечного порядка*. Несколько особняком стоит в этом ряду анонсированный в [1] совместный результат В. В. Напалкова и М. И. Соломеща (доказательство — в диссертации М. И. Соломеща [2]), где был рассмотрен случай целых функций уже *произвольного роста*. Мы приведем здесь некоторые вариации на тему их результата.

Всюду далее $D(z, t)$ — открытый круг на комплексной плоскости \mathbb{C} с центром z радиуса t ; f — произвольная ненулевая целая функция с *последовательностью всех нулей* $\text{Zero}_f := \Lambda = (\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$ — неизменное множество индексов. Затем $T := (t_k)$ и $\Gamma := (\gamma_k)$ — две последовательности соответственно *положительных* и *комплексных* чисел, для которых *при каждом* k выполнено *строгое* неравенство $|\lambda_k - \gamma_k| < t_k$. Кроме того, будет фигурировать объединение кругов $E_\Lambda^T := \bigcup_k D(\lambda_k, t_k)$, про которое все время предполагается, что *каждая связная компонента множества* E_Λ^T *содержит лишь конечное число кругов* $D(\lambda_k, t_k)$.

Сжатая форма результата В. В. Напалкова и М. И. Соломеща —

Теорема ([1, Предложение 1], [2, Предложения 7–9]). *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{t_k} < +\infty, \quad (1)$$

то найдутся целая функция g *с* $\text{Zero}_g = \Gamma$ *и постоянная* C , *для которых*

$$|\log |g(z)| - \log |f(z)|| \leq C \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \setminus E_\Lambda^T.$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00067а, и программы Государственной поддержки ведущих научных школ РФ, проект НШ-10052.2006.1.

При несколько более быстром сближении чисел λ_k и γ_k нами получена

Теорема 1. Если вместо (1) одновременно выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \gamma_k| < +\infty, \quad \sum_{|\lambda_k| \geq r} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{t_k} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow +\infty,$$

то найдется целая функция g с $\text{Zero}_g = \Gamma$ и постоянная C , для которых

$$|\log |g(z)| - \log |f(z)|| \leq \frac{C}{|z|} \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \setminus E_{\Lambda}^T.$$

Эта оценка, вообще говоря, асимптотически неуплучшаема.

Следующий наш результат об асимптотически наилучшей аппроксимации произвольной целой функции другой целой функцией, но уже с простыми нулями, близок к предыдущим методом доказательства.

Теорема 2. Пусть f — целая функция с $\text{Zero}_f = (\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Для каждой убывающей функции $\beta: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся последовательность $(t_k) \subset (0, +\infty)$ и целая функция g с последовательностью только простых нулей $\text{Zero}_g := (\gamma_k)$ такие, что

1) при $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$ круги $D(\lambda_k, t_k)$ и $D(\lambda_{k'}, t_{k'})$ не пересекаются, при всех $r \geq 0$ выполнена оценка $\sum_{|\lambda_k| \geq r} t_k \leq \beta(r)$, и $|\lambda_k - \gamma_k| < t_k$ при всех k ;

2) $|\log |g(z)| - \log |f(z)|| \leq \frac{\varepsilon}{|z|^2}$ при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D(\lambda_k, t_k)$.

Последняя оценка, вообще говоря, асимптотически неуплучшаема.

Список литературы

- [1] В. В. Напалков, М. И. Соломещ Оценка изменения целой функции при сдвигах ее нулей // Доклады РАН. 1995. Т. 342. № 6. С. 739–741.
- [2] М. И. Соломещ Операторы типа свертки в некоторых пространствах аналитических функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Уфа. 1995. 110 С.