Е. Г. Кудашева, Б. Н. Хабибуллин

О близости целых функций с близкими последовательностями нулями [1]

Башкирский государственный аграрный университет, Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: khabib-bulat@mail.ru ; Web-site: http://math.bsunet.ru/khb

С 1950-х гг. в работах Б. Я. Левина, А. А. Гольдберга, И. Ф. Красичкова-Терновского, А. Ф. Гришина, В. С. Азарина, Б. Н. Хабибуллина и многих других исследовалось изменение роста целых функций при сдвигах ее нулей в связи с различными приложениями теории целых функций одной переменной. Как правило, этот вопрос изучался для различных классов целых функций *конечного порядка*. Несколько особняком стоит в этом ряду анонсированный в [1] совместный результат В. В. Напалкова и М. И. Соломеща (доказательство — в диссертации М. И. Соломеща [2]), где был рассмотрен случай целых функций уже *произвольного роста*. Мы приведем здесь некоторые вариации на тему их результата.

Всюду далее $D(z,t)$ — открытый круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром z радиуса t; f — произвольная ненулевая целая функция с *последовательностью всех нулей* $\mathrm{Zero}_f := \Lambda = (\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$ — неизменное множество индексов. Затем $T := (t_k)$ и $\Gamma := (\gamma_k)$ — две последовательности соответственно *положительных* и *комплексных* чисел, для которых *при каждом* k выполнено *строгое* неравенство $|\lambda_k - \gamma_k| < t_k$. Кроме того, будет фигурировать объединение кругов $E^T_\Lambda := \bigcup_k D(\lambda_k, t_k)$, про которое все время предполагается, что *каждая связная компонента множества* E^T_Λ *содержит лишь конечное число кругов* $D(\lambda_k, t_k)$.

Сжатая форма результата В. В. Напалкова и М. И. Соломеща —

Теорема ([1, Предложение 1], [2, Предложения 7–9])**.** *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{t_k} < +\infty, \tag{1}$$

то найдутся целая функция g *с* $\mathrm{Zero}_g = \Gamma$ *и постоянная* C*, для которых*

$$\Bigl|\log|g(z)| - \log|f(z)|\Bigr| \leqslant C \quad \text{\it при всех} \quad z \in \mathbb{C} \setminus E^T_\Lambda .$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00067а, и программы Государственной поддержки ведущих научных школ РФ, проект НШ–10052.2006.1.

При несколько более быстром сближении чисел λ_k и γ_k нами получена

Теорема 1. *Если вместо* (1) *одновременно выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k-\gamma_k|<+\infty, \quad \sum_{|\lambda_k|\geq r}\frac{|\lambda_k-\gamma_k|}{t_k}=O\Big(\frac{1}{r}\Big),\ r\to+\infty,$$

то найдется целая функция g с $\mathrm{Zero}_g=\Gamma$ и постоянная C, для которых

$$\big|\log|g(z)|-\log|f(z)|\big|\leqslant\frac{C}{|z|} \quad \textit{при всех} \quad z\in\mathbb{C}\setminus E_\Lambda^T.$$

Эта оценка, вообще говоря, асимптотически неулучшаема.

Следующий наш результат об асимптотически наилучшей аппроксимации произвольной целой функции другой целой функцией, но уже *с простыми нулями*, близок к предыдущим методом доказательства.

Теорема 2. *Пусть f — целая функция с $\mathrm{Zero}_f=(\lambda_k)$, $k=1,2,\dots$. Для каждой убывающей функции $\beta\colon[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ и любого числа $\varepsilon>0$ найдутся последовательность $(t_k)\subset(0,+\infty)$ и целая функция g с последовательностью только <u>простых нулей</u> $\mathrm{Zero}_g:=(\gamma_k)$ такие, что*

1) *при $\lambda_k\neq\lambda_{k'}$ круги $D(\lambda_k,t_k)$ и $D(\lambda_{k'},t_{k'})$ не пересекаются, при всех $r\geq 0$ выполнена оценка $\sum\limits_{|\lambda_k|\geq r}t_k\leqslant\beta(r)$, и $|\lambda_k-\gamma_k|<t_k$ при всех k;*

2) $\big|\log|g(z)|-\log|f(z)|\big|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{|z|^2}$ *при всех* $z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}D(\lambda_k,t_k)$.

Последняя оценка, вообще говоря, асимптотически неулучшаема.

Список литературы

[1] *В. В. Напалков, М. И. Соломещ* Оценка изменения целой функции при сдвигах ее нулей // Доклады РАН. 1995. Т. 342. № 6. С. 739–741.

[2] *М. И. Соломещ* Операторы типа свертки в некоторых пространствах аналитических функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Уфа. 1995. 110 С.