

2000 MSC: 30D15, 31A05

Варьирование субгармонической функции при трансформации ее меры Рисса

Е. Г. Кудашева, Б. Н. Хабибуллин*

Аннотация

Данная статья сочетает в себе два аспекта.

Во-первых, она содержит в себе сжатый сравнительный обзор известных результатов об изменении роста целой (соответственно субгармонической) функции при сдвигах ее нулей (соответственно при T -сдвиге ее меры Рисса), у истоков которых стоял Б. Я. Левин. Во-вторых, в ней первым из авторов доказаны новые результаты в этом направлении: оценки изменения роста субгармонической функции при «интегральных» ограничениях на T -сдвиг ее меры Рисса, а также наилучшая в некотором смысле аппроксимация целой функции целой функцией с простыми нулями.

Столетию Бориса Яковлевича Левина посвящается

§ 1. Введение: начальные результаты

Через $D(z, t)$ обозначаем *открытый круг* на комплексной плоскости \mathbb{C} радиуса $t > 0$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$, $D(r) := D(0, r)$; при $t \leq 0$ по определению $D(z, t) — пустое множество \emptyset$. Для множества $S \subset \mathbb{C}$ через ∂S обозначаем его границу в \mathbb{C} . В частности, $\partial D(z, t) — окружность радиуса t с центром z$.

Через \mathcal{M}^+ обозначаем класс всех *положительных борелевских мер* μ на \mathbb{C} , $\text{supp } \mu — носитель \mu \in \mathcal{M}^+$; $\mu(z, t) := \mu(D(z, t))$, $\mu^{\text{rad}}(r) := \mu(0, r) = \mu(D(r))$; через $\mu|_B$ обозначаем сужение меры μ на борелевское подмножество $B \subset \mathbb{C}$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность точек в \mathbb{C} , не имеющая предельных точек на комплексной плоскости. Последовательности Λ сопоставляем *целочисленную меру* n_Λ в \mathbb{C} по правилу

$$n_\Lambda(D) := \sum_{\lambda_k \in D} 1, \quad D \subset \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00067а, и программы Государственной поддержки ведущих научных школ РФ, проект НШ-10052.2006.1.

т. е. $n_\Lambda(D)$ — число точек из Λ , попавших в D . При это будем полагать $\text{supp } \Lambda := \text{supp } n_\Lambda$; $\Lambda \subset D$ по определению означает, что $\text{supp } \Lambda \subset D$; $z \in \Lambda$ (соотв.¹ $z \notin \Lambda$) — это то же самое, что и $z \in \text{supp } \Lambda$ (соотв. $z \notin \text{supp } \Lambda$);

$$n_\Lambda^{\text{rad}}(r) = n_\Lambda(D(r)) = \sum_{|\lambda_k| < r} 1, \quad r \geq 0,$$

— считающая функция последовательности Λ , т. е. $n_\Lambda^{\text{rad}}(r)$ — число всех точек этой последовательности, попавших в круг $D(r)$.

В отличие от стандартного взгляда на последовательность как на функцию натурального или целого аргумента, в нашей трактовке *две последовательности* Λ и $\Gamma = \{\gamma_k\}$ в \mathbb{C} *равны* (пишем $\Lambda = \Gamma$), если для соответствующих им мер (1.1) имеем равенство $n_\Lambda = n_\Gamma$. Иначе говоря, каждая *последовательность точек* рассматривается как представитель некоторого класса эквивалентности, состоящего из последовательностей с одинаковыми целочисленными мерами. Последовательность точек $\Gamma \subset \mathbb{C}$ включена в Λ , если $n_\Gamma \leq n_\Lambda$, и при этом пишем $\Gamma \subset \Lambda$, а Γ — *подпоследовательность* последовательности Λ ; *объединение* $\Lambda \cup \Gamma$ через целочисленные меры (1.1) задается равенством $n_{\Lambda \cup \Gamma} = n_\Lambda + n_\Gamma$; *пересечение* $\Lambda \cap \Gamma$ определяется соотношением $n_{\Lambda \cap \Gamma} = \min\{n_\Lambda, n_\Gamma\}$; для $\Gamma \subset \Lambda$ *разность* последовательностей $\Lambda \setminus \Gamma$ определяет мерой $n_\Lambda - n_\Gamma$; последовательность Λ *состоит из простых точек*, если $n_\Lambda(\{z\}) \leq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Если же в какой-то ситуации *принципиально важна нумерация точек последовательности* Λ , то изображаем ее в виде $\Lambda = (\lambda_k)$, т. е. в круглых скобках.

Для ненулевой целой функции f через Zero_f обозначаем *последовательность всех нулей* этой функции, перенумерованную с учетом кратности, т. е. $n_{\text{Zero}_f}(\{z\})$ — это кратность нуля функции f в каждой точке $z \in \mathbb{C}$.

В фундаментальной монографии Б. Я. Левина [1] при построении теории целых функций вполне регулярного роста важнейшую роль сыграли результаты об оценках изменения роста целой функции конечного порядка при сдвиге ее нулей по аргументам [1, Гл. II, Леммы 1, 4]. Приведем здесь только более простой для формулировки случай нецелого порядка ρ в форме, удобной для параллелей с последующими результатами (в оригинале формулировка дана для уточненного порядка $\rho(\cdot)$).

Далее образ точки $z \in \mathbb{C}$ и множества $D \subset \mathbb{C}$ при отображении (преобразовании) $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ часто записываем как Tz и TD .

Теорема L ([1, Гл. II, Лемма 1]). *Пусть f — целая функция с последовательностью нулей $\text{Zero}_f = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, имеющей плотность при нецелом порядке $\rho > 0$, т. е. существует конечный предел*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_{\text{Zero}_f}^{\text{rad}}(r)}{r^\rho}. \quad (1.2)$$

Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $\beta > 0$ можно так подобрать число $d > 0$, что для каждого отображения $T: \text{Zero}_f \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющего условиям

$$|T\lambda_k| = |\lambda_k|, \quad |\arg T\lambda_k - \arg \lambda_k| \leq d, \quad k = 1, 2, \dots,$$

¹Всюду далее это сокращение для предлога «соответственно».

найдется целая функция f_T с последовательностью нулей

$$\text{Zero}_{f_T} = T \text{Zero}_f := \{T\lambda_k\} := \{\gamma_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

для которой оценка

$$|\log |f_T z| - \log |f(z)|| \leq \varepsilon |z|^\rho$$

выполнена при всех $z \in \mathbb{C}$, не принадлежащих некоторому множеству

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} D(z_j, t_j) \quad (1.4)$$

верхней линейной плотности $\leq \beta$, т. е. $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \sum_{|z_j| < r} t_j \leq \beta$.

Как показал А. А. Гольдберг [2, § 6, Лемма], указанные результаты Б. Я. Левина справедливы и тогда, когда Zero_f — последовательность лишь конечной верхней плотности при порядке ρ (или при уточненном порядке $\rho(\cdot)$), т. е. и после замены предела в (1.2) на верхний предел.

Дальнейшие более общие количественные результаты были установлены И. Ф. Красичковым-Терновским в [3], применившим их к задаче спектрального синтеза и к вопросам полноты систем экспонент [4]. В [3] предполагалось, что нули λ_k сдвигаются в произвольных направлениях:

$$\left| 1 - \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right| < d \leq \frac{1}{2} \quad \text{при всех достаточно больших } k, \text{ где } T\lambda_k = \gamma_k. \quad (1.5)$$

Далее через const. обозначаем различные положительные постоянные.

Теорема К-Т ([3]). При условии (1.5) для любой целой функции f с $\text{Zero}_f = \{\lambda_k\}$ конечной верхней плотности при нецелом порядке ρ найдется целая функция f_T с $\text{Zero}_{f_T} = T \text{Zero}_f = \{\gamma_k\}$, для которой при любых $\alpha, \beta \in (0, 1)$ и при некоторой постоянной const. , не зависящей от α, β, d , оценка

$$|\log |f_T z| - \log |f(z)|| \leq \text{const.} \frac{d^{1-\alpha}}{\alpha \beta \sin \pi \alpha} |z|^\rho \quad (1.6)$$

выполнена при всех $z \in \mathbb{C}$, не принадлежащих некоторому исключительному множеству (1.4) верхней линейной плотности $\leq \beta d^{\alpha^2}$.

Нетрудно видеть, что для преобразования T , удовлетворяющего равенствам $|T\lambda_k| = |\lambda_k|$ из (1.5), условие (1.5) влечет за собой неравенства для разности аргументов из (1.5) с ограничением $1,033d$ вместо d . Следовательно, путем несложного подбора постоянных α, β, d из Теоремы К-Т Красичкова-Терновского легко вытекает Теорема Л Левина. Некоторое развитие Теоремы К-Т было приведено впоследствии в [5, Теорема А].

В [6] В. С. Азарин дал общую субгармоническую интерпретацию для концепции сдвигов нулей целой функции и получил результат, использованный им

для асимптотической аппроксимации субгармонических функций логарифмами модуля целой функции, для построения целой функции вполне регулярного роста на произвольной заданной замкнутой системе лучей, а также, как и в [4, Следствие 4.3], для расщепления целой функции на произведение целых функций с заданным ростом на бесконечности [7]. Еще один результат В. С. Азарина [8, § 5, вариационная теорема], относящийся к рассматриваемым здесь вопросам, формулируется в терминах сходимости в пространствах обобщенных функций, или на языке теории предельных множеств в смысле В. С. Азарина.

А. Ф. Гришин [9] изучал асимптотическое поведение приращения субгармонических функций при сдвиге, т. е. асимптотику $|u(z+h) - u(z)|$ при $z \rightarrow \infty$ в зависимости от величины сдвига h . Эти результаты также могут быть интерпретированы как влияние на изменение субгармонической функции очень специального варьирования ее меры Риссы, порожденного конкретным преобразованием плоскости $T: z \mapsto z+h$, $z \in \mathbb{C}$, при фиксированном h (см. такой подход в [10], а вместе с обобщениями — в [11] и [12]).

Мы не касаемся здесь многочисленных работ, в которых рассматриваются взаимосвязь сдвигов нулей (соотв. преобразований мер Рисса) целых (соотв. субгармонических) функций с изменениями поведения этих функций для случаев, когда рассматриваются очень специальные сдвиги нулей (соотв. преобразования мер) или классы функций в связи с задачами аппроксимации субгармонических функций, устойчивости свойств полноты, минимальности, базисности и т. п. для систем функций в функциональных пространствах.

Частично такие работы отмечены в [13], [14].

§ 2. Субгармоническая интерпретация по В. С. Азарину

Остановимся подробнее на субгармонической интерпретации сдвига нулей целой функции, данной В. С. Азариним. **Всюду далее** в § 2

- отображение $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ измеримо по Борелю и, кроме того,
- для любого ограниченного в \mathbb{C} подмножества B его прообраз $T^{-1}B$ также ограничен в \mathbb{C} .

Для меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ ее T -сдвиг $\nu_T \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$, или, другими словами, образ $T\nu$ меры ν при отображении T (см. [15, гл. IV, § 6]), определяется по правилу

$$\nu_T(B) := \nu(T^{-1}B), \quad B \subset \mathbb{C} \text{ — борелевское множество.} \quad (2.1)$$

При этом для борелевской функции f на борелевском подмножестве $B \subset \mathbb{C}$

$$\int_B f d\nu_T = \int_{T^{-1}B} f(Tz) d\nu(z) \quad (2.2)$$

Не умаляя общности, всюду предполагаем, что носители мер не содержат 0.

Следуя Л. Шварцу [15, гл. I, § 4], всюду *положительность* числа, функции, меры и т. п. понимаем как ≥ 0 , а > 0 — это *строгая положительность*;

аналогичные соглашения ≤ 0 и < 0 — для отрицательности и строгой отрицательности. Если для отображения (функции) f на множестве X имеем $f(x) \equiv a$ при всех $x \in X$, то пишем « $f \equiv a$ на X », а если это не так, то « $f \not\equiv a$ на X ». Функция f на подмножестве X вещественной оси \mathbb{R} , называется *возрастающей* (соотв. *строго возрастающей*), если при всех $x_1 < x_2$ из X выполнено неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соотв. $f(x_1) < f(x_2)$). Аналогично различаем *убывание* и *строгое убывание*.

Теорема А ([6, Основная лемма]). Пусть $d: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ — убывающая функция и $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{d(t)}{d(2t)} < +\infty$, а для отображения $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\left| 1 - \frac{Tz}{z} \right| \leq d(|z|) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Если $\nu \in \mathcal{M}^+$ — мера конечного типа при нецелом порядке ρ , т. е.

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\nu^{\text{rad}}(r)}{r^\rho} < +\infty,$$

и $p := [\rho]$ — целая часть числа ρ , то для любой субгармонической функции u с мерой Рисса ν найдется такая субгармоническая функция u_T с мерой Рисса ν_T , что для произвольного числа $\beta \in (0, 1/\sqrt{2})$ оценка

$$\begin{aligned} & |u_T(z) - u(z)| \\ & \leq \text{const.} \frac{|z|^\rho}{\beta^2} \left(\int_0^1 \frac{d(|z|t) dt}{t^{1+p-\rho}} + \int_1^{+\infty} \frac{d(|z|t) dt}{t^{2+p-\rho}} \right) \end{aligned} \quad (2.4\text{I})$$

$$+ \text{const.} |z|^\rho \beta \log \frac{1}{\beta} \quad (2.4\text{r})$$

выполнена при всех $z \in \mathbb{C}$, не принадлежащих некоторому исключительному множеству (1.4) верхней линейной плотности $\leq \text{const.} \cdot \beta$. Здесь все три возникающие постоянные const. не зависят от числа β и функции d .

В частности, для целой функции f с последовательностью простых² нулей $\text{Zero}_f = \{\lambda_k\}$ конечной верхней плотности при порядке ρ по Теореме А при условии (2.3) найдется целая функция f_T с последовательностью нулей (1.3), для которой при $u := \log |f|$ и $u_T := \log |f_T|$ справедлива оценка (2.4) вне исключительного множества (1.4) верхней линейной плотности $\leq \text{const.} \cdot \beta$.

В условиях Теоремы К-Т для $d(t) \equiv d(0) =: d \in (0, 1/2]$ оценка (2.4) позволяет заменить правую часть оценки (1.6) на несколько более удобную величину $\text{const.} \left(\frac{d}{\beta^2} + \beta \log \frac{1}{\beta} \right) |z|^\rho$ с выполнением ее вне некоторого исключительного множества (1.4) верхней линейной плотности $\leq \text{const.} \cdot \beta$. Она действительно

²От ограничений на кратность нулей нетрудно избавиться по общей схеме из § 3.

представляется более удобной, поскольку, выбирая $\beta = \sqrt[3]{d}$, а затем переобозначая $\sqrt[3]{d}$ как d , удается избавиться от параметров α, β без потерь в содержательности: для любого числа $d \in (0, 1)$ левую часть (1.6) в Теореме Красичкова-Терновского можно оценить сверху через $\text{const.} \cdot d|z|^\rho \log(1/d)$ вне исключительного множества вида (1.4) верхней линейной плотности $\leq \text{const.} \cdot d$, где постоянная const. не зависит от d .

По виду последнего слагаемого (2.4г) в правой части оценки (2.4) можно заключить, что, как бы мала ни была функция d в (2.3), Теорема А не может дать оценку для $|u_T - u|$ порядка меньшего, чем $|z|^\rho$. Это означает, что заключение Теоремы Азарина не в достаточной мере «чувствует» степень близости мер ν и ν_T . Отмеченная незавершенность ликвидирована в работе Б. Н. Хабибуллина [16]. Более того, в ней получены в определенной степени наилучшие возможные оценки в терминах поведения функции $|Tz - z|$ с охватом и n -мерного случая. Для формулировки одной из версий этих результатов для комплексной плоскости потребуются дополнительные обозначения. Полагаем

$$\delta(z) := |Tz - z|, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \delta_T(z) := \begin{cases} \sup_{T\zeta=z} |z - \zeta|, & z \in T\mathbb{C}, \\ \delta_T(z) := 0, & z \notin T\mathbb{C}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Для меры $\sigma \in \mathcal{M}^+$ с $\text{supp } \sigma \cap \{0\} = \emptyset$ в ее характеристике (ср. с (2.4I))

$$K_q(r, d\sigma) := r^q \int_0^{r-0} \frac{d\sigma^{\text{rad}}(t)}{t^q} + r^{1+q} \int_{r-0}^{+\infty} \frac{d\sigma^{\text{rad}}(t)}{t^{1+q}} \quad (2.6d)$$

$$= qr^q \int_0^{r-0} \sigma^{\text{rad}}(t) \frac{dt}{t^{1+q}} + (q+1)r^{q+1} \int_{r-0}^{+\infty} \sigma^{\text{rad}}(t) \frac{dt}{t^{2+q}} \quad (2.6p)$$

$$= q \int_0^{1-0} \sigma^{\text{rad}}(rt) \frac{dt}{t^{1+q}} + (q+1) \int_{1-0}^{+\infty} \sigma^{\text{rad}}(rt) \frac{dt}{t^{2+q}}, \quad r \geq 0, \quad (2.6c)$$

в роли q целесообразно выбирать положительное целое число, не меньшее *рода* q_σ меры σ . Напомним, что *род* меры σ равен наименьшему значению целого числа $q \geq 0$, при котором конечен второй интеграл в (2.6d), или в (2.6p), (2.6c).

Для числа $\varepsilon > 0$, функции f на \mathbb{C} со значениями в расширенной вещественной оси $[-\infty, +\infty]$, упорядоченной естественным отношением порядка $-\infty \leq x \leq +\infty$, $x \in [-\infty, +\infty]$, и подмножества $B \subset \mathbb{C}$ положим

$$f^{(\varepsilon)}(z) := \sup\{f(\zeta) : \zeta \in D(z, \varepsilon|z|)\}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad B^\varepsilon := \bigcup_{z \in B} D(z, \varepsilon|z|). \quad (2.7)$$

При $0 < \varepsilon < 1$ легко убедиться в справедливости соотношений

$$(f^{(\varepsilon)})^{(\varepsilon)}(z) \leq f^{(3\varepsilon)}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (B^\varepsilon)^\varepsilon \subset B^{3\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Теорема Kh1 ([16, Теорема 2]). Пусть u — субгармоническая функция с мерой Рисса ν , $0 \notin \text{supp } \nu$, а мера $\sigma \in \mathcal{M}^+$ рода $q_\sigma \leq q < +\infty$, q — целое, определена через ее формальную плотность $d\sigma := \delta d\nu + \delta_T d\nu_T$ в обозначениях (2.5). Тогда для некоторой субгармонической функции u_T с мерой Рисса ν_T при любой борелевской функции $N: \mathbb{C} \rightarrow (1, +\infty)$ и произвольном числе $\varepsilon \in (0, 1)$ оценка

$$|u(z) - u_T(z)| \leq \text{const. } N^{(\varepsilon)}(z) \frac{K_q(|z|, d\sigma)}{\varepsilon^2 |z|} \times \log \left(2 + \frac{\varepsilon |z|}{K_q(|z|, d\sigma)} (\nu(z, \varepsilon |z|) + \nu_T(z, \varepsilon |z|)) \right) \quad (2.9)$$

с некоторой постоянной const. , зависящей только от q , выполнена всюду вне исключительного множества вида (1.4), для которого при любом измеримом по мере Лебега λ в \mathbb{C} множестве $B \subset \mathbb{C}$ справедлива оценка

$$\sum_{z_j \in B} t_j \leq \int_{B^\varepsilon} \frac{d\lambda(z)}{N(z)|z|} \quad \text{и} \quad t_j \leq \frac{\varepsilon}{3} |z_j| \quad \text{при всех } j = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Если функция N зависит только от $|z|$ и ее сужение на $[0, +\infty)$ возрастает, то по определениям и свойствам (2.7)–(2.8) $N^{(\varepsilon)}(z) \equiv N((1 + \varepsilon)|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, а оценку суммы из (2.10) в силу ограничений³ $t_j \leq \frac{\varepsilon}{3} |z_j|$, $j = 1, 2, \dots$, можно заменить на более удобную и полезную для применений оценку

$$\sum_{D(z_j, t_j) \cap (D(R) \setminus D(r)) \neq \emptyset} t_j \leq 2\pi \int_{\max\{(1-3\varepsilon)r, 0\}}^{(1+3\varepsilon)R} \frac{dt}{N(t)}. \quad (2.11)$$

Применим Теорему Kh1 к некоторому усилению Теоремы А.

Заметим, что Теорема Азарина содержательна лишь при малой убывающей функции d . Поэтому, не умаляя общности, в ее условия можно добавить ограничение $d(0) \leq 1/2$. Тогда при условии (2.3) в обозначениях (2.5) имеем $\delta(z) \leq d(|z|)|z|$ и, как следствие, $\delta_T(z) \leq \text{const. } d(|z|)|z|$. Отсюда, используя для меры σ , определенной при формулировке Теоремы Kh1, представление и неравенство

$$\sigma^{\text{rad}}(t) = \int_0^t \delta(s) d\nu^{\text{rad}}(s) + \int_0^t \delta_T(s) d\nu_T^{\text{rad}}(s) \leq \text{const. } t^{\rho+1}, \quad (2.12)$$

нетрудно вывести, что ее род q_σ не больше, чем $q = \rho + 1 = [\rho] + 1$. Кроме того, отсюда же, после серии несколько утомительных интегрирований по частям для

³Этих ограничений нет в оригинальной формулировке [16, Теорема 2], но они явно присутствуют в доказательстве (см. также диссертацию [13] или ее автореферат [14]).

характеристики (2.6) в версии (2.6d) и замены переменной следует и оценка

$$\begin{aligned} \frac{K_q(r, d\sigma)}{r} &\leq \text{const. } r^\rho \left(\int_0^1 \frac{d(rt) dt}{t^{1+p-\rho}} + \int_1^{+\infty} \frac{d(rt) dt}{t^{2+p-\rho}} \right) \\ &\leq \text{const. } r^\rho \left(\int_0^1 \frac{d(rt) dt}{t^{1+p-\rho}} + \frac{1}{1+p-\rho} d(r) \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если при этом в условиях и обозначениях Теоремы А выбрать $\varepsilon = 1/3$ и положить $N(t) \equiv 4\pi/\beta$, $t \geq 0$, то по Теореме Kh1 ввиду возрастания при $a > 0$ функции $x \log(2 + a/x)$ по $x \in [0, +\infty)$ из (2.10) и (2.11) по (2.9) и (2.13) имеем

$$\begin{aligned} |u(z) - u_T(z)| &\leq \text{const. } \frac{|z|^\rho}{\beta} \left(\int_0^1 \frac{d(|z|t) dt}{t^{1+p-\rho}} + \frac{1}{1+p-\rho} d(|z|) \right) \\ &\quad \times \log \left(2 + \text{const. } \frac{\nu(z, |z|/3) + \nu_T(z, |z|/3)}{|z|^\rho \left(\int_0^1 \frac{d(|z|t) dt}{t^{1+p-\rho}} + \frac{1}{1+p-\rho} d(|z|) \right)} \right), \end{aligned}$$

что после некоторого ослабления дает

Следствие Kh1. *В условиях Теоремы А оценку (2.4) можно заменить на выполнение для некоторой субгармонической функции u_T оценки*

$$|u_T(z) - u(z)| \leq \text{const. } \frac{|z|^\rho}{\beta} \left(\int_0^1 \frac{d(|z|t) dt}{t^{1+p-\rho}} + d(|z|) \right) \log \left(2 + \frac{1}{d(|z|)} \right) \quad (2.14)$$

вне исключительного множества (1.4) верхней линейной плотности $\leq \beta$.

Оценка (2.14) тоньше, чем (2.4) в Теореме А, поскольку, например, для $d(t) \equiv (1+t)^{-\varepsilon}$, $t \geq 0$, при $0 < \varepsilon < \rho - [\rho]$ правая часть в (2.14) легко оценивается сверху величиной $O(|z|^{\rho-\varepsilon} \log |z|)$, $z \rightarrow \infty$, порядок роста которой строго меньше, чем у функции $|z|^\rho$ при $z \rightarrow \infty$ (ср. с комментарием непосредственно перед (2.5)).

Использование рода q_σ меры σ в Теореме Kh1 (ниже он $\leq [\rho - \gamma] + 1$) позволяет дать значительно более общую и уточненную версию Следствия Kh1.

Следствие Kh2 ([13, Следствие 3.1]). *Пусть u — субгармоническая функция конечного типа при порядке $\rho \geq 0$ с мерой Рисса ν . Если для числа $\gamma \in [0, \rho + 1]$ и функции $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1/2]$, убывающей на $[a, +\infty)$ при некотором $a > 0$, $\varphi \equiv 0$ на $[0, a)$, отображение $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\left| 1 - \frac{Tz}{z} \right| \leq \varphi(|z|) |z|^{-\gamma}, \quad z \neq 0, \quad (2.15)$$

то найдется такая субгармоническая функция u_T порядка не выше ρ с мерой Рисса ν_T , что для любой возрастающей на $[0, +\infty)$ функции $N \geq 2$ оценка

$$|u_T(z) - u(z)| \leq \text{const.} \cdot |z|^{\rho-\gamma} \left(\int_0^1 \frac{\varphi(|z|t) dt}{t^{1+[\rho-\gamma]-(\rho-\gamma)}} + \varphi(|z|/2) N(2|z|) \log \left(2 + \frac{|z|^\gamma}{\varphi(|z|/2)} \right) \right) \quad (2.16)$$

выполнена вне исключительного множества вида (1.4), для которого

$$\sum_{D(z_j, t_j) \cap (D(R) \setminus D(r)) \neq \emptyset} t_j \leq \int_{r/2}^{2R} \frac{dt}{N(t)} \text{ при всех достаточно больших } r < R. \quad (2.17)$$

К сожалению, в Следствии Kh2 функция u_T может иметь и бесконечный тип при порядке ρ . Конечность типа функции u_T при порядке ρ в Следствии Kh2 обеспечивает, например (см. [13, Замечание 2 на стр. 57]), любое из следующих трех условий: 1) ρ — нецелое число; 2) $\gamma > 0$; 3) сходиться интеграл $\int_1^{+\infty} \varphi(t) \frac{dt}{t}$.

Еще одна форма дополнения Теоремы Азарина — это

Следствие Kh3 ([13, Замечание 1 на стр. 56]). Пусть в условиях предыдущего Следствия Kh2 в (2.15) вместо убывающей функции φ рассматривается уже возрастающая на $[a, +\infty)$ функция φ , удовлетворяющая условию $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \varphi(t)}{\log t} = 0$, но при этом $0 < \gamma \leq \rho + 1$. Тогда с такой же возрастающей функцией $N \geq 2$ можно сделать аналогичные выводы, но с оценкой

$$|u_T(z) - u(z)| \leq \text{const.} \cdot |z|^{\rho-\gamma} \left(\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(|z|t) dt}{t^{2+[\rho-\gamma]-(\rho-\gamma)}} + \varphi(2|z|) N(2|z|) \log \left(2 + \frac{|z|^\gamma}{\varphi(2|z|)} \right) \right) \quad (2.18)$$

вне исключительного множества вида (1.4), удовлетворяющего (2.17).

Замечание 1. По правым частям оценок (2.9), (2.16) и (2.18) соотв. Теоремы Kh1 и Следствий Kh2 и Kh3 легко видеть, что эти результаты не могут дать порядок близости функций u и u_T менее чем $O(1/|z|)$. Вообще говоря, такая близость действительно максимально возможная. Так, для субгармонической функции $u(z) \equiv \log |z - \lambda|$ при отображении T , переводящем точку λ в точку $\gamma \neq \lambda$, нетрудно понять, что функция $u_T(z) \equiv \log |z - \gamma|$ асимптотически наиболее близка к u . В то же время при всех $|z| \geq 2 \max\{|\lambda|, |\gamma|\}$ справедлива оценка

$$|u_T(z) - u(z)| \equiv |\log |z - \gamma| - \log |z - \lambda|| \geq \frac{2|\lambda - \gamma|}{|z|}.$$

Замечание 2. Как и в комментарии сразу после Теоремы А все «субгармонические» результаты этого параграфа можно рассматривать как утверждения об изменении роста целой функции f при сдвиге последовательности ее нулей $\text{Zero}_f = \{\lambda_k\}$ в последовательность нулей (1.3) некоторой целой функции f_T с соответствующими переформулировками для $u := \log |f|$ и $u_T := \log |f_T|$. При этом, к примеру, условия (2.3) и (2.15) переписутся соответственно в виде

$$\left|1 - \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right| \leq d(|\lambda_k|), \quad \left|1 - \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right| \leq \varphi(|\lambda_k|)|\lambda_k|^{-\gamma}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad T\lambda_k := \gamma_k.$$

Но поскольку всюду рассматривались *отображения* T , то такой перенос результатов возможен, вообще говоря, только для случая, когда последовательность Zero_f не имеет кратных (повторяющихся) точек. Преодолеть это затруднение можно различными способами. Один из возможных предлагается в § 3.

§ 3. Аппроксимация целыми функциями с простыми нулями

Отметим сначала анонсированный в [17] совместный результат В. В. Напалкова и М. И. Соломеща, прямо вписывающейся в рассматриваемую здесь тематику. Его доказательство изложено в диссертации М. И. Соломеща [18].

Пусть f — произвольная целая функция с последовательностью нулей $\text{Zero}_f = (\lambda_k)$, $0 \notin \text{Zero}_f$, представленная разложением Вейерштрасса

$$f(z) = R(z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \exp p_k(z/\lambda_k), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

где R — целая функция без нулей, p_k — многочлены, $k = 1, 2, \dots$.

В [17] определяется последовательность $d = (d_k) \subset \mathbb{C}$ с $\lambda_k + d_k \neq 0$ при всех $k = 1, 2, \dots$, для которой $d_k = d_{k'}$ во всех случаях, когда $\lambda_k = \lambda_{k'}$.

Функции f сопоставляется произведение

$$f_d(z) = R(z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k + d_k}\right) \exp p_k(z/\lambda_k), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

а затем определяется множество кругов $D(\lambda_k, t_k)$, $t_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, причем по-прежнему $t_k = t_{k'}$, как только $\lambda_k = \lambda_{k'}$.

Теорема N–S ([17, Предложение 1], [18, Предложения 7–9]). В приведенных обозначениях и соглашениях пусть $|d_k| < t_k$ при всех $k = 1, 2, \dots$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|d_k|}{t_k} < +\infty. \quad (3.3)$$

Тогда вне объединения $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} D(\lambda_k, t_k)$ произведение (3.2) определяет аналитическую функцию и для некоторой постоянной const. справедлива оценка

$$\left| \log |f_d(z)| - \log |f(z)| \right| \leq \text{const.}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E.$$

Если каждая связная компонента множества E содержит лишь конечное число кругов $D(\lambda_k, t_k)$, то функция f_d — целая.

Учитывая свойства последовательностей (d_k) и (t_k) по отношению к последовательности (λ_k) , представляется уместным ввести вспомогательное понятие. Будем говорить, что *последовательность* (a_k) , $k = 1, 2, \dots$, *увязана с последовательностью* (b_k) , $k = 1, 2, \dots$, если из равенства $b_k = b_{k'}$ сразу следует, что $a_k = a_{k'}$. В частности, выше по условию последовательности (d_k) и (t_k) , а также $(\lambda_k + d_k)$ увязаны с последовательностью (λ_k) . В силу последнего Теорема N–S не может выполнить главную задачу этого параграфа: помочь «расщепить» кратные нули функции f на простые нули для функции f_d , поскольку по построению последовательности $\text{Zero}_{f_d} = \{\lambda_k + d_k\}$ *совпадающие точки* $\lambda_k = \lambda_{k'}$ переходят в такие же точки $\lambda_k + d_k = \lambda_{k'} + d_{k'}$ из Zero_{f_d} .

Основной результат этого параграфа был анонсирован довольно давно в [19], но доказательство его приводится здесь впервые.

Теорема 1. Пусть f — целая функция с $\text{Zero}_f = (\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Для каждой убывающей функции $\beta: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $(t_k) \subset (0, +\infty)$, увязанная с (λ_k) , и целая функция g с последовательностью только простых нулей $\text{Zero}_g = (\gamma_k)$ такие, что

1) при $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$ круги $D(\lambda_k, t_k)$ и $D(\lambda_{k'}, t_{k'})$ не пересекаются, при всех $r \geq 0$ выполнена оценка $\sum_{|\lambda_k| \geq r} t_k \leq \beta(r)$, и, наконец, $|\gamma_k - \lambda_k| < t_k$ при всех k ;

2) имеет место неравенство

$$|\log |g(z)| - \log |f(z)|| \leq \frac{\varepsilon}{|z|^2} \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D(\lambda_k, t_k); \quad (3.4)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда

(!) *кратность нуля функции f в каждой точке — четное число.*

В этом случае последовательность нулей $\text{Zero}_f = \{\lambda_k\} =: \Lambda$ можно представить в виде объединения $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$, где последовательности $\Lambda' = (\lambda'_k)$ и $\Lambda'' = (\lambda''_k)$, $k = 1, 2, \dots$, таковы, что $\lambda'_k = \lambda''_k$ при каждом $k = 1, 2, \dots$.

Теперь выберем последовательность строго положительных чисел (t_k) , увязанную с последовательностью (λ'_k) , для которой круги $D(\lambda'_k, t_k)$ попарно не пересекаются и одновременно при всех $r \geq 0$ выполнена оценка $\sum_{|\lambda'_k| \geq r} t_k \leq \beta(r)$, т. е. выполнено 1). Это всегда можно сделать, поскольку эти условия не взаимоисключающие в том смысле, что оба требуют лишь достаточного уменьшения значений членов последовательности (t_k) . Затем по заданному $\varepsilon > 0$ подберем строго положительные числа $d_k \leq t_k/2$ столь малыми, что (ср. с (3.3))

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k |\lambda'_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^6}, \quad \sum_{|\lambda'_k| \geq r} \frac{d_k}{t_k^2} |\lambda'_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^6 r^2} \quad \text{при всех } r > 0. \quad (3.5)$$

Каждой паре совпадающих точек $(\lambda'_k, \lambda''_k)$ сопоставим *две диаметрально противоположные точки* γ'_k и γ''_k на окружности $\partial D(\lambda'_k, d_k)$, т. е.

$$\gamma'_k + \gamma''_k = 2\lambda'_k = 2\lambda''_k = \lambda'_k + \lambda''_k, \quad |\gamma'_k - \lambda'_k| = |\gamma''_k - \lambda''_k| = d_k. \quad (3.6)$$

Поскольку каждая точка плоскости может совпадать лишь с конечным числом точек λ'_k , то, поворачивая на окружностях $\partial D(\lambda'_k, d_k)$, если это необходимо, различные построенные диаметрально противоположные пары точек (γ'_k, γ''_k) , можно добиться того, что $|\gamma'_k| \leq |\lambda'_k|$ и

(*) объединение $\Gamma_0 := \Gamma' \cup \Gamma''$ последовательностей $\Gamma' = (\gamma'_k)$ и $\Gamma'' = (\gamma''_k)$ состоит из простых точек, и в то же время по построению $\Lambda \cap \Gamma_0 = \emptyset$.

Займемся теперь оценкой суммы разностей

$$\Sigma(z) := \sum_k \left(\log |(z - \gamma'_k)(z - \gamma''_k)| - \log |(z - \lambda'_k)(z - \lambda''_k)| \right) \text{ при } z \notin \bigcup_k D(\lambda'_k, t_k). \quad (3.7)$$

С учетом (3.6) из тождества

$$L_k(z) := \log |(z - \gamma'_k)(z - \gamma''_k)| - \log |(z - \lambda'_k)(z - \lambda''_k)| = \log \left| 1 - \frac{\lambda'_k \lambda''_k - \gamma'_k \gamma''_k}{(z - \lambda'_k)^2} \right|$$

следует оценка сверху

$$L_k(z) \leq \log \left(1 + \frac{|\lambda'_k \lambda''_k - \gamma'_k \gamma''_k|}{|z - \lambda'_k|^2} \right) \leq \frac{|\lambda''_k| |\lambda'_k - \gamma'_k| + |\gamma'_k| |\lambda''_k - \gamma''_k|}{|z - \lambda'_k|^2} \leq \frac{2d_k |\lambda'_k|}{|z - \lambda'_k|^2}. \quad (3.8)$$

Подобным же образом из следующих тождества и неравенства

$$-L_k(z) = \log \left| 1 + \frac{\lambda'_k \lambda''_k - \gamma'_k \gamma''_k}{(z - \gamma'_k)(z - \gamma''_k)} \right| \leq \log \left(1 + \frac{|\lambda'_k \lambda''_k - \gamma'_k \gamma''_k|}{|z - \gamma'_k| |z - \gamma''_k|} \right)$$

с учетом (3.6) и при $|z - \lambda'_k| > d_k$ получаем

$$-L_k(z) \leq \frac{2d_k |\lambda'_k|}{(|z - \lambda'_k| - |\lambda'_k - \gamma'_k|)(|z - \lambda''_k| - |\lambda''_k - \gamma''_k|)} \leq \frac{2d_k |\lambda'_k|}{(|z - \lambda'_k| - d_k)^2}.$$

Но уже при $|z - \lambda'_k| \geq t_k \geq 2d_k$ имеем $|z - \lambda'_k| - d_k \geq |z - \lambda'_k|/2$, откуда

$$-L_k(z) \leq \frac{2^3 d_k |\lambda'_k|}{|z - \lambda'_k|^2} \text{ при } |z - \lambda'_k| \geq t_k.$$

Последняя оценка вместе с (3.8) применительно к (3.7) дает оценку

$$|\Sigma(z)| \leq \sum_k |L_k(z)| \leq \sum_k \frac{2^3 d_k |\lambda'_k|}{|z - \lambda'_k|^2} \text{ при } z \notin \bigcup_k D(\lambda'_k, t_k) =: E.$$

При фиксированном $z \notin E$ эту оценку можно записать в виде

$$|\Sigma(z)| \leq \left(\sum_{|\lambda'_k| < |z|/2} + \sum_{|\lambda'_k| \geq |z|/2} \right) \frac{2^3 d_k |\lambda'_k|}{|z - \lambda'_k|^2} \leq \sum_{|z - \lambda'_k| \geq |z|/2} \frac{2^3 d_k |\lambda'_k|}{|z - \lambda'_k|^2} + \sum_{|\lambda'_k| \geq |z|/2} \frac{2^3 d_k |\lambda'_k|}{t_k^2}.$$

Здесь первая сумма в правой части с учетом (3.5) оценивается сверху как

$$\sum_{|z-\lambda'_k| \geq |z|/2} \frac{2^3 d_k |\lambda'_k|}{|z-\lambda'_k|^2} \leq \sum_k \frac{2^5 d_k |\lambda'_k|}{|z|^2} \leq \frac{\varepsilon}{2|z|^2},$$

а вторая сумма, также с учетом (3.5), как

$$\sum_{|\lambda'_k| \geq |z|/2} \frac{2^3 d_k |\lambda'_k|}{t_k^2} \leq \frac{\varepsilon}{2^3(|z|/2)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2|z|^2}.$$

Таким образом, из последних трех оценок следует

$$|\Sigma(z)| \leq \frac{\varepsilon}{|z|^2} \quad \text{при } z \notin E = \bigcup_k D(\lambda'_k, t_k). \quad (3.9)$$

Построение проводилось в случае (!). Но если среди нулей функции f оказались нули нечетной кратности, то мы могли бы представить последовательность ее нулей в виде объединения Зеро $f = \Lambda_0 \cup \Lambda$ последовательности $\Lambda_0 = \{\lambda_k^0\}$ простых точек и *последовательности Λ точек четной кратности*, т.е. $n_\Lambda(\{z\})$ — четное число для каждой точки $z \in \mathbb{C}$. В этом случае в качестве будущей последовательности всех нулей искомой функции g объявляем последовательность $\Gamma := \Lambda_0 \cup \Gamma_0 = (\gamma_k)$, где последовательность Γ_0 построена по последовательности Λ так же, как и выше. В силу (*) при этом Γ — *последовательность простых точек*, а исключительное множество $E = \bigcup_k D(\lambda'_k, t_k)$ то же, что и для Λ . Кроме того, ввиду (3.9) при соответствующей перенумерации и переобозначениях, если это необходимо, точек из $\text{Зеро } f = \Lambda_0 \cup \Lambda := (\lambda_k)$, $\Gamma := (\gamma_k)$ и (t_k) при $z \notin \bigcup_k D(\lambda_k, t_k) = E$ справедлива оценка

$$|\Sigma(z; \Lambda, \Gamma)| := \left| \sum_k (\log |z - \gamma_k| - \log |z - \lambda_k|) \right| \leq \frac{\varepsilon}{|z|^2}, \quad (3.10)$$

где $t_k = 0$, если точка λ_k — простая, т.е. при $n_\Lambda(\{\lambda_k\}) = 1$.

Для завершения доказательства можно воспользоваться представлением Вейрштасса (3.1) для f и задать функцию g в виде произведения (ср. с (3.2))

$$g(z) = R(z) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k - z}{\lambda_k} \exp p_k(z/\lambda_k), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.11)$$

для которого ввиду (3.10) имеют место соотношения

$$|\log |g(z)| - \log |f(z)|| \equiv |\Sigma(z; \Lambda, \Gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{|z|^2} \quad \text{при } z \notin E.$$

Отсюда, пользуясь принципом максимума на возрастающей последовательности ограниченных областей с границами, не пересекающимися с E , убеждаемся, что произведение (3.11) равномерно ограничено на компактах. Следовательно, по теореме Монтеля можно утверждать, что произведение (3.11) определяет целую функцию g с простыми нулями, удовлетворяющую оценке (3.4) вне E .

Теорема доказана.

Замечание 1. Пример многочлена $f: z \mapsto z^2$ показывает, что оценка (3.4) неумлучшаема. Действительно, для любой пары точек $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \mathbb{C}$ найдется некоторая постоянная $\text{const.} > 0$, с которой выполняется неравенство

$$\left| \log |(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)| - \log |z^2| \right| \geq \frac{\text{const.}}{|z|^2} \quad \text{при всех } |z| \geq 2 \max\{|\gamma_1|, |\gamma_2|\}.$$

Замечание 2. Теорема 1 полностью и «с запасом» решает проблему, отмеченную в замечании 2 из § 2, поскольку по замечанию 1 из § 2 максимально возможная близость функций имеет порядок $O(1/|z|)$.

В заключение этого параграфа отметим без доказательства результат, подобный Теореме N-S. Он устанавливается аналогично Теореме 1.

Теорема 2. Пусть f — целая функция с последовательностью нулей $\text{Zero}_f = (\lambda_k) =: \Lambda$, $k = 1, 2, \dots$, а последовательность строго положительных чисел (t_k) , увязанная с Λ , такова, что связные компоненты множества $E := \bigcup_k D(\lambda_k, t_k)$ содержат конечное число кругов $D(\lambda_k, t_k)$. Если для последовательности (d_k) , $0 \leq d_k < t_k$, $k = 1, 2, \dots$, выполнены условия (ср. с (3.3))

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k < +\infty, \quad \sum_{|\lambda_k| \geq r} \frac{d_k}{t_k} = O(1/r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.12)$$

то для любой последовательности точек $(\gamma_k) \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющей неравенствам $|\lambda_k - \gamma_k| \leq d_k$, $k = 1, 2, \dots$, найдется целая функция g с последовательностью нулей $\text{Zero}_g = (\gamma_k)$ и постоянная const. , для которых

$$\left| \log |g(z)| - \log |f(z)| \right| \leq \frac{\text{const.}}{|z|} \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \setminus E.$$

Очевидно, что при условии ограниченности последовательности (t_k) сходимость первой суммы в (3.12) — следствие второго условия из (3.12).

§ 4. Интегральное ограничение на T -сдвиг: основной результат

Как обычно, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ и \mathbb{Z} — множества соотв. всех натуральных и целых чисел; $\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$. При $q < s$ по определению $\prod_{m=s}^q \dots := 1$, $\sum_{m=s}^q \dots := 0$.

Первичный множитель Вейерштрасса рода $q \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через

$$E_q(z, \zeta) := \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \prod_{m=1}^q \exp \frac{z^m}{m \zeta^m}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

К истокам основной теоремы этого параграфа, анонсированной в [20], наряду с описанными выше в §§ 1–2 результатами относится следующий частный случай классической теоремы Линделефа о взаимосвязи роста целой функции и распределении ее нулей [1, гл. I, § 11, Теорема 15].

Предложение 1. Если для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, при некотором $\rho > 0$ конечна сумма ряда $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda_k|^\rho}$, то при

$$q := \begin{cases} [\rho] - \text{целая часть } \rho, & \text{если } \rho - \text{нецелое,} \\ \rho - 1 = [\rho] - 1, & \text{если } \rho - \text{целое,} \end{cases} \quad (4.1)$$

каноническое произведение Вейерштрасса–Адамара рода q , определяемое как

$$W_\Lambda(z) := \prod_{k=1}^{\infty} E_q(z, \lambda_k), \quad z \in \mathbb{C},$$

— целая функция нулевого типа при порядке ρ с $\text{Zero}_W = \Lambda$.

Субгармоническое ядро Вейерштрасса–Адамара рода q обозначим через

$$e_q(z, \zeta) := \log |E_q(z, \zeta)| = \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| + \sum_{m=1}^q \frac{1}{m} \operatorname{Re} \frac{z^m}{\zeta^m}, \quad z \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (4.2)$$

Если на \mathbb{C} определена локально ограниченная сверху функция

$$w_\nu(z) := \int_{\mathbb{C}} e_q(z, \zeta) d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.3)$$

с областью определения $[-\infty, +\infty)$, то естественно называть ее каноническим потенциалом Вейерштрасса–Адамара рода q меры ν .

Субгармоническая версия (частный случай [21, 4.2]) Предложения 1 —

Предложение 2. Если $0 \notin \operatorname{supp} \nu$ для $\nu \in \mathcal{M}^+$ и $\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta|^\rho} d\nu(\zeta) < +\infty$, то w_ν — субгармоническая функция нулевого типа при порядке ρ с мерой Рисса ν .

Как очередной шаг, развивающий эти факты при $\rho = 1$, можно рассмотреть следующую теорему, формулируемую здесь с некоторой потерей в содержательной и конструктивной части по сравнению с оригинальной трактовкой.

Теорема Kh2 ([22, Теорема 1(аппроксимационная)]). Пусть $f \not\equiv 0$ — целая функция экспоненциального типа и $\text{Zero}_f = (\lambda_k)$, а (γ_k) — последовательность в \mathbb{C} , $k = 1, 2, \dots$. Если сходится ряд

$$\sum_{\gamma_k \cdot \lambda_k \neq 0} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| \quad (4.4)$$

то найдется целая функция экспоненциального типа $g \not\equiv 0$ с последовательностью нулей $\text{Zero}_g = \Gamma$ и с тем же индикатором роста, что и f .

Естественное распространение последнего результата на целые функции произвольного конечного порядка ρ было анонсировано в [23]. На роль обобщения условия (4.4) была предложена [23, Следствие 1] сходимость ряда вида

$$\sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{|\lambda_k|^\rho} \left| 1 - \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right|. \quad (4.5)$$

Субгармоническая версия была сформулирована там же без доказательства в несколько более слабой и менее четкой форме, чем основная в нашей работе

Теорема 3 (частичные формулировки в [23, Теорема], [20, Теорема]). *Пусть мера $\nu \in \mathcal{M}^+$ конечного типа при порядке $\rho > 0$, а T — такое измеримое по Борелю отображение \mathbb{C} в \mathbb{C} , что прообраз каждого ограниченного множества при этом отображении ограничен. Если выполнены два условия*

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{|Tz|}{|z|} > 0, \quad \int_{\mathbb{C} \setminus D(1)} \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) < +\infty, \quad (4.6)$$

то для любой субгармонической функции u с мерой Рисса ν найдется субгармоническая функция u_T с мерой Рисса ν_T , для которой при любом числе $\varepsilon > 0$ существует такое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{C}$ верхней линейной плотности $\leq \varepsilon$, что

$$|u_T(z) - u(z)| \leq \varepsilon |z|^\rho \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C} \setminus E_\varepsilon. \quad (4.7)$$

В частности, при любом $\varepsilon > 0$ с некоторой const. выполнены оценки

$$\begin{cases} u_T(z) \leq \sup_{|\zeta-z| \leq \varepsilon|z|} u(\zeta) + \varepsilon |z|^\rho + \text{const.}, \\ u(z) \leq \sup_{|\zeta-z| \leq \varepsilon|z|} u_T(\zeta) + \varepsilon |z|^\rho + \text{const.}, \end{cases} \quad |z| \geq 1. \quad (4.8)$$

При этом если u — функция конечного типа при порядке ρ , то функция u_T такая же, а индикаторы роста функций u и u_T совпадают.

Доказательство. Сразу зафиксируем значение $\varepsilon > 0$. Нам удобно разбить доказательство теоремы на несколько пунктов.

1. Отделение меры от нуля. При доказательстве для любого сколь угодно большого (но фиксированного) $R \geq 1$ можно считать, что $\text{supp } \nu \cap D(R) = \emptyset$. Действительно, если u — субгармоническая функция с мерой Рисса ν , то можно представить функцию u в виде суммы

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} \log |\zeta - z| d \left(\nu \Big|_{D(R)} \right) (\zeta) + u^R(z) =: p_R(z) + u^R(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\nu \Big|_{D(R)}$ — сужение меры ν на круг $D(R)$, u^R — субгармоническая функция с мерой Рисса $\nu \Big|_{\mathbb{C} \setminus D(R)} = \nu - \nu \Big|_{D(R)}$, для которой $D(R) \cap \text{supp} \left(\nu \Big|_{\mathbb{C} \setminus D(R)} \right) = \emptyset$. Логарифмический потенциал p_R обладает свойством [24, Теорема 3.1.2]

$$p_R(z) = \nu \Big|_{D(R)} (\mathbb{C}) \log |z| + O(1/|z|) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Из (2.1)–(2.2) и из ограниченности $T^{-1}D(R)$ в условиях теоремы носитель T -сдвига $(\nu|_{D(R)})_T$ меры $\nu|_{D(R)}$ — компакт, $(\nu|_{D(R)})_T(\mathbb{C}) = \nu|_{D(R)}(\mathbb{C})$ и для

$$(p_R)_{Tz} := \int_{\mathbb{C}} \log|\zeta - z| d(\nu|_{D(R)})_T(\zeta) = (\nu|_{D(R)})_T(\mathbb{C}) \log|z| + O(1/|z|), \quad z \rightarrow \infty,$$

ввиду (4.9) справедливо соотношение $p_R(z) - (p_R)_{Tz} = O(1/|z|)$ при $z \rightarrow \infty$. Последнее означает, что если при фиксированном $\varepsilon > 0$ для некоторого $R \geq 1$ функции u^R и u_T^R удовлетворяют соотношениям вида (4.7)–(4.8), то добавление к ним соответственно логарифмических потенциалов p_R и $(p_R)_T$ даст в точности (4.7)–(4.8) при возможном увеличении постоянной const., если это необходимо.

В силу первого условия из (4.6) для некоторого числа $b > 0$ число $R \geq 1$ всегда можно выбрать столь большим, что

$$b|z| \leq |Tz| \quad \text{при всех } z \notin D(R), \quad (4.10)$$

а по второму условию из (4.6) справедливо соотношение

$$\int_{\mathbb{C} \setminus D(R)} \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) =: \alpha(R) \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Позже будет уточнен выбор значения R в зависимости от ε и других вводимых ниже параметров. Пока лишь будем считать, что число $R \geq 1$ выбрано так, что имеет место неравенство (4.10), и, кроме того, выполнено условие

$$\text{supp } \nu \cap D(R) = \emptyset. \quad (4.12)$$

При этом, очевидно, для некоторого числа $B > 0$ справедливо неравенство

$$\nu^{\text{rad}}(t) \leq Bt^\rho \quad \text{при всех } t > 0. \quad (4.13)$$

Важно отметить, что при описанной выше процедуре «отбрасывания» сужения меры ν на круг $D(R)$ постоянная B здесь не растет с увеличением R .

Отметим также, что из (4.10) следует включение $T^{-1}D(t) \subset D(t/b)$ при любых $t \geq R$. Отсюда согласно (2.1) получаем

$$\nu_T^{\text{rad}}(t) = \nu_T(D(t)) = \nu(T^{-1}D(t)) \leq \nu^{\text{rad}}(t/b).$$

В частности, это значит, что при соглашениях (4.12)–(4.13)

$$\text{supp } \nu_T \cap D(bR) = \emptyset, \quad \nu_T^{\text{rad}}(t) \leq \frac{B}{b^\rho} t^\rho \quad \text{при всех } t > 0, \quad (4.14)$$

т. е. мера ν_T конечного типа при порядке ρ с носителем вне нуля.

2. Основной оцениваемый интеграл. Для q из (4.1) рассмотрим интеграл⁴

$$I(z) := \int_{\mathbb{C}} e_q(z, \zeta) d(\nu_T - \nu)(\zeta). \quad (4.15)$$

Нашей целью будет получение в условиях Теоремы 3 оценки $|I(z)| \leq \varepsilon |z|^\rho$ для всех z , лежащих вне некоторого множества верхней линейной плотности $\leq \varepsilon$.

Положим

$$D_{1/9} := \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| < \frac{1}{9} \right\}, \quad \nu^{1/9} := \nu \Big|_{D_{1/9}} \quad (4.16)$$

— сужение меры ν на множество $D_{1/9}$,

$$\nu_T^{1/9} := (\nu^{1/9})_T, \quad \tilde{\nu}^{1/9} := \nu - \nu^{1/9}, \quad \tilde{\nu}_T^{1/9} := (\tilde{\nu}^{1/9})_T = \nu_T - (\nu^{1/9})_T. \quad (4.17)$$

Учитывая (2.2), (4.12) и (4.14), представим $I(z)$ в виде алгебраической суммы

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{\mathbb{C}} (e_q(z, T\zeta) - e_q(z, \zeta)) d\nu^{1/9}(\zeta) \\ &+ \int_{\mathbb{C}} e_q(z, \zeta) d\tilde{\nu}_T^{1/9}(\zeta) - \int_{\mathbb{C}} e_q(z, \zeta) d\tilde{\nu}^{1/9}(\zeta) =: I_{1/9}(z) + w_{\tilde{\nu}_T^{1/9}}(z) - w_{\tilde{\nu}^{1/9}}(z), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где использовано обозначение (4.3) для канонических потенциалов $w_{\tilde{\nu}_T^{1/9}}$ и $w_{\tilde{\nu}^{1/9}}$

Вейерштрасса–Адамара рода q соотв. мер $\tilde{\nu}_T^{1/9}$ и $\tilde{\nu}^{1/9}$.

По второму условию из (4.6) для $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D_{1/9}$, т. е. при $|1 - (T\zeta)/\zeta| \geq 1/9$, согласно соглашению (4.10) для $|\zeta| \geq R$ получаем оценки

$$b|\zeta| \leq |T\zeta|, \quad \frac{1}{|\zeta|^\rho} \leq \frac{9}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right|, \quad \frac{1}{|T\zeta|^\rho} \leq \frac{1}{b^\rho |\zeta|^\rho} \leq \frac{9}{b^\rho |\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right|.$$

Отсюда для сужения $\tilde{\nu}^{1/9}$ меры ν из (4.17) с учетом (4.12) и (4.6) имеем

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta|^\rho} d\tilde{\nu}^{1/9}(\zeta) \leq 9 \int_{\mathbb{C} \setminus D(R)} \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) < +\infty,$$

а для T -сдвига $\tilde{\nu}_T^{1/9}$ этого сужения из (4.17) с учетом (4.14), (4.12) и (4.6) —

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta|^\rho} d\tilde{\nu}_T^{1/9}(\zeta) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|T\zeta|^\rho} d\tilde{\nu}^{1/9}(\zeta) \leq \frac{1}{b^\rho} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta|^\rho} d\tilde{\nu}^{1/9}(\zeta) < +\infty.$$

Из конечности этих двух интегралов по Предложению 2 определенные в (4.3) субгармонические функции $w_{\tilde{\nu}^{1/9}}$ и $w_{\tilde{\nu}_T^{1/9}}$ — нулевого типа при порядке ρ .

⁴Сходимость (конечность) возникающих далее интегралов для точек z , лежащих вне некоторого «малого исключительного» множества, будет следовать из устанавливаемых оценок.

Предложение 3 (частный случай [12, Теорема 2]). Пусть u — субгармоническая функция в \mathbb{C} , функция $N: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ — возрастающая. Тогда для некоторых абсолютных постоянных a_1, a_2 неравенство

$$u(z) \geq -a_1 \left(\max_{|\zeta|=2|z|} u(\zeta) \right) \cdot \log(a_2 N(|z|))$$

выполнено для всех $z \in \mathbb{C} \setminus E_0$, где E_0 вида (1.4) таково, что $\sum_{|z_j| < r} t_j \leq \int_0^r \frac{dt}{N(t)}$.

Применение Предложения 3 к каждой из функций $w_{\nu^{1/9}}$ и $w_{\nu_T^{1/9}}$ при достаточно медленно возрастающей до бесконечности функции N дает соотношение

$$|w_{\nu^{1/9}}(z)| + |w_{\nu_T^{1/9}}(z)| = o(|z|^\rho) \text{ при } z \in \mathbb{C} \setminus E_0, z \rightarrow \infty, \quad (4.19)$$

где E_0 — некоторое множество нулевой верхней линейной плотности. Другими словами, E_0 — это C_0 -множество в терминологии [1]. Отсюда, возвращаясь к представлению (4.18) интеграла $I(z)$ из (4.15) и декларированной после (4.15) цели, задача упрощается: достаточно доказать оценку $|I_{1/9}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z|^\rho$ вне множества верхней линейной плотности $\leq \varepsilon$. Далее для краткости будем обозначать $I_{1/9}(z)$ и $\nu^{1/9}$ как соотв. $I(z)$ и ν . При этом согласно определениям (4.16) и (4.17) при доказательстве оценки $|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z|^\rho$ можем предполагать, что отображение T удовлетворяет наряду с (4.10)–(4.11) и условию

$$\left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| < \frac{1}{9}, \text{ а значит, и } \frac{8}{9}|\zeta| \leq |T\zeta| \leq \frac{10}{9}|\zeta| \text{ для всех } \zeta \in S_\nu, \quad (4.20)$$

где $S_\nu \subset \mathbb{C}$ — множество, на котором сосредоточена мера ν .

3. Интеграл $I(z)$. Перепишем интеграл $I(z)$ из (4.15) по правилу (2.2) и с учетом определения ядра Вейерштрасса–Адамара рода q из (4.2) в виде

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{\mathbb{C}} (e_q(z, T\zeta) - e_q(z, \zeta)) d\nu(\zeta) \\ &= \int_{|\zeta| \geq 4|z|} (e_q(z, T\zeta) - e_q(z, \zeta)) d\nu(\zeta) \\ &\quad + \int_{|\zeta| < 4|z|} \sum_{m=1}^q \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{z^m}{(T\zeta)^m} - \frac{z^m}{\zeta^m} \right) d\nu(\zeta) \\ &\quad + \int_{D(4|z|) \setminus D(z, |z|/2)} \left(\log \left| 1 - \frac{z}{T\zeta} \right| - \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \right) d\nu(\zeta) \\ &\quad + \int_{D(z, |z|/2)} \left(\log \left| 1 - \frac{z}{T\zeta} \right| - \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \right) d\nu(\zeta) \\ &=: J_\infty(z) + J_0(z) + L(z) + L_0(z). \end{aligned} \quad (4.21)$$

3.1. *Оценка интеграла $J_\infty(z)$.* Учитывая условие $|T\zeta| \geq 8|\zeta|/9$ из (4.20), воспользуемся разложением в ряд при $|\zeta| \geq 4|z|$ для

$$e_q(z, T\zeta) - e_q(z, \zeta) = - \sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{z^m}{(T\zeta)^m} - \frac{z^m}{\zeta^m} \right),$$

из которого следует оценка

$$|e_q(z, T\zeta) - e_q(z, \zeta)| \leq \sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{|z|^m}{m} \left| \frac{1}{(T\zeta)^m} - \frac{1}{\zeta^m} \right|. \quad (4.22)$$

При любых $\zeta \neq 0$ и $T\zeta \neq 0$ справедливо равенство

$$\left| \frac{1}{(T\zeta)^m} - \frac{1}{\zeta^m} \right| = |T\zeta - \zeta| \cdot \frac{\left| \sum_{k=0}^{m-1} (T\zeta)^{m-1-k} \zeta^k \right|}{|T\zeta|^m |\zeta|^m},$$

а следовательно, и оценка

$$\left| \frac{1}{(T\zeta)^m} - \frac{1}{\zeta^m} \right| \leq |T\zeta - \zeta| \cdot \frac{m \left(\max\{|T\zeta|, |\zeta|\} \right)^{m-1}}{|T\zeta|^m |\zeta|^m}.$$

Отсюда в условиях (4.20) для любых $\zeta \neq 0$ и $T\zeta \neq 0$ и $m \geq 1$ имеем

$$\left| \frac{1}{(T\zeta)^m} - \frac{1}{\zeta^m} \right| \leq |T\zeta - \zeta| \cdot \frac{m \left(\max\{|T\zeta|, |\zeta|\} \right)^m}{|T\zeta|^m |\zeta|^{m+1}} \leq \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \cdot \frac{m 2^m}{|\zeta|^m}. \quad (4.23)$$

Используя последнее для продолжения (4.22) вправо, при $|\zeta| \geq 4|z|$ получаем

$$|e_q(z, T\zeta) - e_q(z, \zeta)| \leq \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{2^m |z|^m}{|\zeta|^m} \leq \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \frac{2^{q+2} |z|^{q+1}}{|\zeta|^{q+1}}.$$

Полученную оценку применим к

$$\begin{aligned} |J_\infty(z)| &\leq \int_{|\zeta| \geq 4|z|} |e_q(z, T\zeta) - e_q(z, \zeta)| d\nu(\zeta) \leq \int_{|\zeta| \geq 4|z|} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \frac{2^{q+2} |z|^{q+1}}{|\zeta|^{q+1}} d\nu(\zeta) \\ &= |z|^\rho \int_{|\zeta| \geq 4|z|} \frac{2^{q+2} |z|^{q+1-\rho}}{|\zeta|^{q+1-\rho}} \left(\frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \right) d\nu(\zeta) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

По определению числа q в (4.1) имеем $q+1-\rho \geq 0$, значит при всех $|\zeta| \geq 4|z|$

$$\frac{2^{q+2} |z|^{q+1-\rho}}{|\zeta|^{q+1-\rho}} \leq \frac{2^{q+2}}{4^{q+1-\rho}} = 2^{2\rho-q} \leq 4^\rho.$$

Таким образом, получаем окончательную оценку для

$$|J_\infty(z)| \leq 4^\rho |z|^\rho \int_{|\zeta| \geq 4|z|} \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \quad (4.24)$$

3.2. *Оценка интеграла $J_0(z)$ из (4.21).* Используя доказанную выше в условиях (4.20) оценку (4.23), для подынтегрального выражения интеграла $J_0(z)$ при любых $0 < |\zeta| < 4|z|$ и $T\zeta \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^q \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{z^m}{(T\zeta)^m} - \frac{z^m}{\zeta^m} \right) d\nu(\zeta) \right| &\leq \sum_{m=1}^q \frac{|z|^m}{m} \left| \frac{1}{(T\zeta)^m} - \frac{1}{\zeta^m} \right| d\nu(\zeta) \\ &\leq \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \sum_{m=1}^q \frac{2^m |z|^m}{|\zeta|^m} = |z|^\rho \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \sum_{m=1}^q 2^m (|\zeta|/|z|)^{\rho-m}. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку по определению числа q в (4.1) при всех $m = 1, 2, \dots, q$ выполнено $\rho - m \geq 0$, а $|\zeta|/|z| < 4$, легко следует неравенство

$$\left| \sum_{m=1}^q \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left(\frac{z^m}{(T\zeta)^m} - \frac{z^m}{\zeta^m} \right) d\nu(\zeta) \right| \leq 2^{2\rho} \left(1 - \frac{1}{2^q} \right) |z|^\rho \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right|.$$

Таким образом, получаем окончательную оценку для

$$|J_0(z)| \leq 4^\rho |z|^\rho \int_{|\zeta| < 4|z|} \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \quad (4.25)$$

3.3. *Оценка интеграла $L(z)$ из (4.21).* Для подынтегрального выражения интеграла $L(z)$ справедливо легко проверяемое тождество

$$l_T(z, \zeta) := \log \left| 1 - \frac{z}{T\zeta} \right| - \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \equiv \log \left| 1 + \frac{z\zeta}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{T\zeta} \right) \right|, \quad (4.26)$$

$\zeta T\zeta \neq 0$. Оценим *сверху* правую часть при $\zeta \in D(4|z|) \setminus D(z, |z|/2)$, т. е. при

$$0 < |\zeta| < 4|z|, \quad |\zeta - z| \geq \frac{1}{2}|z|, \quad T\zeta \neq 0. \quad (4.27)$$

В этих условиях, учитывая неравенство $|T\zeta| \geq 8|\zeta|/9$ из (4.20), согласно (4.26)

$$\begin{aligned} l_T(z, \zeta) &\leq \log \left(1 + \frac{|z||\zeta|}{|\zeta - z|} \cdot \left| \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{T\zeta} \right| \right) \leq \frac{|z||\zeta|}{|\zeta - z||T\zeta|} \cdot \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \\ &\leq \frac{2|\zeta|}{|T\zeta|} \cdot \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \leq 3 \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \leq 3 \cdot 4^\rho |z|^\rho \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right|. \end{aligned} \quad (4.28)$$

В тех же условиях, используя тождество (4.26), оценим *сверху*

$$-l_T(z, \zeta) \equiv \log \left| 1 + \frac{z \cdot T\zeta}{T\zeta - z} \cdot \left(\frac{1}{T\zeta} - \frac{1}{\zeta} \right) \right| \leq \frac{|z|}{|T\zeta - z|} \cdot \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right|. \quad (4.29)$$

Ввиду (4.20) имеем $|\zeta - T\zeta| < |\zeta|/9$, откуда в условиях (4.27)

$$|T\zeta - z| \geq |\zeta - z| - |\zeta - T\zeta| \geq \frac{1}{2}|z| - \frac{1}{9}|\zeta| \geq \frac{1}{2}|z| - \frac{4}{9}|z| = \frac{1}{18}|z|.$$

Таким образом, можно продолжить (4.29) так же, как и в концовке (4.28):

$$-l_T(z, \zeta) \leq 18 \cdot \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \leq 18 \cdot 4^\rho |z|^\rho \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right|.$$

Последнее вместе с (4.28) дает окончательную оценку интеграла

$$|L(z)| \leq \int_{D(4|z|) \setminus D(z, |z|/2)} |l_T(z, \zeta)| d\nu(\zeta) \leq 18 \cdot 4^\rho |z|^\rho \int_{|\zeta| < 4|z|} \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta)$$

при всех $z \in \mathbb{C}$. Отсюда и из (4.25) и (4.24), подводя промежуточный итог в оценке интеграла $I(z)$, в обозначении (4.11) можем записать оценку

$$|I(z)| \leq 19 \cdot 4^\rho |z|^\rho \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) + |L_0(z)| = 19 \cdot 4^\rho |z|^\rho \alpha(R) + |L_0(z)|, \quad (4.30)$$

справедливую, после упрощений пп. **1** и **2**, при всех $z \in \mathbb{C}$. Оценка модуля от

$$L_0(z) = \int_{D(z, |z|/2)} l_T(z, \zeta) d\nu(z), \quad (4.31)$$

где l_T из (4.26), возможна, вообще говоря, только вне некоторого исключительного множества, выделению которого посвящен следующий пункт.

4. Нормальные точки. Дадим вариант определения нормальных точек.

Определение ([16, § 2]). Пусть $f \geq 0$ — измеримая по Борелю функция на \mathbb{C} , строго положительная на носителе меры $\nu \in \mathcal{M}^+$, и задана также функция $d: \mathbb{C} \rightarrow (0, 1/2]$. Точка $z \in \mathbb{C}$ называется (f, d) -нормальной относительно ν , если

$$\nu(z, t) \leq f^{(d)}(z) t \quad \text{для всех } t \leq d(z)|z|, \quad \text{где } f^{(d)}(z) := \sup_{|\zeta - z| \leq d(z)|z|} f(\zeta). \quad (4.32)$$

Частный случай утверждения из [16, Лемма о нормальных точках] —

Лемма. Множество точек $z \in \mathbb{C}$, не являющихся (f, d) -нормальными относительно меры $\nu \in \mathcal{M}^+$, содержится в объединении не более чем счетного числа таких кругов $D(z_j, t_j)$, $j = 1, 2, \dots$, что выполнены неравенства

$$\sum_{z_j \in D} t_j \leq a \int_{D^d} \frac{d\nu}{f} \quad \text{и} \quad t_j \leq d(z_j)|z_j| \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}. \quad (4.33)$$

Здесь a — некоторая абсолютная постоянная (можно положить $a = 18$), D — любое ν -измеримое подмножество в \mathbb{C} , а $D^d := \bigcup_{z \in D} D(z, d(z)|z|)$.

Здесь мы выбираем $d \equiv 1/2$ и $f(z) \equiv M|z|^{\rho-1}$ для всех $z \neq 0$, где $M > 0$ — постоянная, а затем рассматриваем множество E точек z , не являющихся (f, d) -нормальными относительно хотя бы одной из мер ν или ν_T . Другими словами, $z \in \mathbb{C} \setminus E$, если выполняются ограничения

$$\max\{\nu(z, t), \nu_T(z, t)\} \leq f^{(1/2)}(z) \cdot t = M c_\rho |z|^{\rho-1} t \quad \text{для всех } 0 < t \leq |z|/2, \quad (4.34)$$

где $c_\rho := \frac{\max\{3^{\rho-1}, 1\}}{2^{\rho-1}}$. По Лемме множество E можно покрыть кругами $D(z_j, t_j)$, $j \in \mathbb{N}$, для которых ввиду (4.33) справедливы соотношения $t_j \leq |z_j|/2$, $j \in \mathbb{N}$, и

$$\sum_{|z_j| \leq r} t_j \leq a \int_{(D(r))^{1/2}} \frac{d(\nu + \nu_T)(z)}{M|z|^{\rho-1}} = \frac{a}{M} \int_0^{3r/2} \frac{d(\nu^{\text{rad}}(t) + \nu_T^{\text{rad}}(t))}{t^{\rho-1}}.$$

Отсюда ввиду принятых соглашений (4.12)–(4.13) и полученных из них соотношений (4.14), интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{|z_j| \leq r} t_j &\leq \frac{a}{M} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\rho-1} \frac{\nu^{\text{rad}}(3r/2)}{r^{\rho-1}} + (\rho-1) \int_0^{3r/2} \frac{\nu^{\text{rad}}(t) dt}{t^\rho} \right) \\ &+ \frac{a}{M} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\rho-1} \frac{\nu_T^{\text{rad}}(3r/2)}{r^{\rho-1}} + (\rho-1) \int_0^{3r/2} \frac{\nu_T^{\text{rad}}(t) dt}{t^\rho} \right) \\ &= \frac{3aB}{2M} \left(1 + \frac{1}{b^\rho} \right) \cdot r, \quad r \geq 0. \end{aligned}$$

Затем выбираем значение $M > 0$ столь большим, что множитель перед r не превышает величины $\varepsilon/6$, т. е. выполнено условие

$$\sum_{|z_j| \leq r} t_j < \frac{\varepsilon}{6} \cdot r \quad \text{при всех } r \geq 1. \quad (4.35)$$

Выделенное здесь множество E для краткости будем называть просто *исключительным множеством*, а точки плоскости \mathbb{C} вне него — *нормальными*.

Особо отметим, что «отбрасывание части» мер ν и ν_T при *увеличении* R , предпринятое ранее в п. 1, не меняет выводов этого пункта, поскольку постоянную B , а значит, и соответствующий подбор постоянной $M > 0$, равно как и выбор множества покрывающих кругов $D(z_j, t_j)$, можно считать неизменными при всех значениях $R \geq 1$. Кроме того, дословно повторив стандартные рассуждения из завершающей части [22, п. 1)], можно сделать вывод: *для любой точки $z' \in \mathbb{C}$, $|z'| \geq r_0$, существует некоторое число $\epsilon(z') \in (0, \varepsilon)$, при котором окружность $\partial D(z', \epsilon(z')|z'|)$ проходит только через нормальные относительно ν и ν_T точки z в том смысле, что во всех этих точках z выполнено (4.34).*

5. Оценка интеграла $L_0(z)$ из (4.31). Используя представление (4.26) для l_T , установим сначала оценку *сверху*. При $|\zeta - z| < |z|/2$ и условия (4.20), обеспечивающем в этом случае неравенство $|T\zeta| \geq 8|\zeta|/9$, получаем

$$l_T(z, \zeta) \leq \log \left(1 + \frac{|z||\zeta|}{|\zeta - z||T\zeta|} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \right) \leq \log \left(1 + \frac{9|z|/8}{|\zeta - z|} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \right).$$

Для M и c_ρ из (4.34) от п. 4 зафиксируем параметр $c > 0$ столь малый, что

$$Mc_\rho \left(c + c \log \left(1 + \frac{1}{2c} \right) \right) \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{и одновременно} \quad c \left(\frac{5}{3} \right)^\rho \frac{B}{b^\rho} \leq \frac{\varepsilon}{8}. \quad (4.36)$$

Затем запишем предшествующую оценку для l_T в несколько ослабленном виде

$$\begin{aligned} l_T(z, \zeta) &\leq \log \left(1 + \frac{2|z|c}{|\zeta - z|} \cdot \frac{1}{c} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \right) \\ &\leq \log \left(1 + \frac{2|z|c}{|\zeta - z|} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{c} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \right) \\ &\leq \log \left(1 + \frac{2|z|c}{|\zeta - z|} \right) + \frac{1}{c} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right|. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Интегрируя это неравенство по мере ν в круге $D(z, |z|/2)$, по (4.31) получаем

$$\begin{aligned} L_0(z) &\leq \int_{D(z, |z|/2)} \log \left(1 + \frac{2|z|c}{|\zeta - z|} \right) d\nu(\zeta) + \frac{1}{c} \int_{D(z, |z|/2)} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) \\ &= \int_0^{|z|/2} \log \left(1 + \frac{2|z|c}{t} \right) d\nu(z, t) + \frac{1}{c} \int_{D(z, |z|/2)} |\zeta|^\rho \frac{1}{|\zeta|^\rho} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) \\ &\leq \int_0^{|z|/2} \log \left(1 + \frac{2|z|c}{t} \right) d\nu(z, t) + \frac{2^\rho}{c} |z|^\rho \alpha(R), \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $\alpha(R)$ — обозначение для интеграла из (4.11). Оценку интеграла из правой части (4.38) проведем для *нормальных точек* z . Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_0^{|z|/2} \log \left(1 + \frac{2|z|c}{t} \right) d\nu(z, t) &= \log(1 + 4c) \nu(z, |z|/2) + 2c|z| \int_0^{|z|/2} \frac{\nu(z, t) dt}{t(t + 2c|z|)} \\ &\leq \log(1 + 4c) \nu(z, |z|/2) + 2c|z| \int_0^{|z|/2} \frac{\nu(z, t) dt}{t(t + 2c|z|)} \leq 4c \cdot Mc_\rho |z|^\rho / 2 \\ &\quad + 2c|z| \int_0^{|z|/2} \frac{Mc_\rho |z|^{\rho-1} dt}{t + 2c|z|} = 2Mc_\rho |z|^\rho \left(c + c \log \left(1 + \frac{1}{4c} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Отсюда по выбору параметра c в (4.36) из (4.38) следует

$$L_0(z) \leq \frac{\varepsilon}{4} |z|^\rho + \frac{2^\rho}{c} |z|^\rho \alpha(R), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad (4.40)$$

где E — исключительное множество из п. 4. Перейдем теперь к оценке *снизу*.

Из тождества (4.29) с параметром c , как и в (4.37), следует оценка

$$\begin{aligned} -l_T(z, \zeta) &\leq \log \left(1 + \frac{|z|}{|T\zeta - z|} \cdot \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \right) \\ &\leq \log \left(1 + \frac{|z|c}{|T\zeta - z|} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{c} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \right) \\ &\leq \log \left(1 + \frac{c|z|}{|T\zeta - z|} \right) + \frac{1}{c} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по мере ν в круге $D(z, |z|/2)$, аналогично (4.38) получаем

$$-L_0(z) \leq \int_{D(z, |z|/2)} \log \left(1 + \frac{c|z|}{|T\zeta - z|} \right) d\nu(\zeta) + \frac{2^\rho}{c} |z|^\rho \alpha(R). \quad (4.41)$$

Для оценки интеграла из правой части отметим, что при $\zeta \in D(z, |z|/2)$ ввиду (4.20), дающего соотношения $|T\zeta - \zeta| < |\zeta|/9 \leq |z|/6$, имеем

$$|T\zeta - z| \leq |T\zeta - \zeta| + |\zeta - z| \leq \frac{1}{6} |z| + \frac{1}{2} |z| \leq \frac{2}{3} |z|.$$

Это означает, что справедливо включение $D(z, |z|/2) \subset T^{-1}D(z, 2|z|/3)$. Следовательно, для интеграла из правой части (4.41) справедлива оценка

$$\int_{D(z, |z|/2)} \log \left(1 + \frac{c|z|}{|T\zeta - z|} \right) d\nu(\zeta) \leq \int_{T^{-1}D(z, 2|z|/3)} \log \left(1 + \frac{c|z|}{|T\zeta - z|} \right) d\nu(\zeta).$$

Но по (2.2) и (4.14) это можно переписать для *нормальных точек* z как

$$\begin{aligned} &\int_{D(z, |z|/2)} \log \left(1 + \frac{c|z|}{|T\zeta - z|} \right) d\nu(\zeta) \leq \int_{D(z, 2|z|/3)} \log \left(1 + \frac{c|z|}{|\zeta - z|} \right) d\nu_T(\zeta) \\ &= \int_0^{2|z|/3} \log \left(1 + \frac{c|z|}{t} \right) d\nu_T(z, t) = \left(\int_0^{|z|/2} + \int_{|z|/2}^{2|z|/3} \right) \log \left(1 + \frac{c|z|}{t} \right) d\nu_T(z, t) \\ &\leq \int_0^{|z|/2} \log \left(1 + \frac{c|z|}{t} \right) d\nu_T(z, t) + \log(1 + 2c) \nu_T^{\text{rad}}(5|z|/3) \\ &\leq \log(1 + 2c) \nu_T(z, |z|/2) + c|z| \int_0^{|z|/2} \frac{\nu_T(z, t) dt}{t(t + c|z|)} + 2c \left(\frac{5}{3} \right)^\rho \frac{B}{b^\rho} |z|^\rho. \end{aligned}$$

Отсюда для нормальной точки $z \in \mathbb{C} \setminus E$ ввиду (4.34) так же, как и в (4.39), получаем неравенство

$$\int_{D(z, |z|/2)} \log \left(1 + \frac{c|z|}{|T\zeta - z|} \right) d\nu(\zeta) \leq Mc_\rho |z|^\rho \left(c + c \log \left(1 + \frac{1}{2c} \right) \right) + 2c \left(\frac{5}{3} \right)^\rho \frac{B}{b^\rho} |z|^\rho.$$

Тогда, учитывая выбор параметра c в (4.36), из (4.41) следует

$$\begin{aligned} -L_0(z) &\leq Mc_\rho |z|^\rho \left(c + c \log \left(1 + \frac{1}{2c} \right) \right) + 2c \left(\frac{5}{3} \right)^\rho \frac{B}{b^\rho} |z|^\rho + \frac{2^\rho}{c} |z|^\rho \alpha(R) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{8} |z|^\rho + \frac{\varepsilon}{4} |z|^\rho + \frac{2^\rho}{c} |z|^\rho \alpha(R) = \frac{3\varepsilon}{8} |z|^\rho + \frac{2^\rho}{c} |z|^\rho \alpha(R). \end{aligned}$$

Вместе с (4.40) это дает окончательную оценку для

$$|L_0(z)| \leq \frac{3\varepsilon}{8} |z|^\rho + \frac{2^\rho}{c} |z|^\rho \alpha(R), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E,$$

а вместе с (4.30) — и для

$$|I(z)| \leq \alpha(R) \left(19 \cdot 4^\rho + \frac{2^\rho}{c} \right) |z|^\rho + \frac{3\varepsilon}{8} |z|^\rho.$$

Как указывалось в конце п. 4, нет никаких препятствий для неограниченного увеличения числа $R \geq 1$ из п. 1. Учитывая (4.11), можем выбрать R столь большим, что $\alpha(R)(19 \cdot 4^\rho + 2^\rho/c) \leq \varepsilon/8$. Тогда $|I(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |z|^\rho$ при $z \in \mathbb{C} \setminus E$. Но если вспомнить договоренности в конце п. 2, то через $I(z)$ на самом деле был переобозначен интеграл $I_{1/9}(z)$ из (4.18). Для начального же интеграла $I(z)$ из (4.15) ввиду представления (4.18) и по соотношению (4.19) получаем оценку $|I(z)| \leq \varepsilon |z|^\rho$ при $z \in \mathbb{C} \setminus (E \cup E_0)$, где E_0 — это C_0 -множество. Отсюда ввиду (4.35) следует, что множество $E_\varepsilon := E \cup E_0$ по-прежнему содержится в некотором объединении кругов $D(z_j, t_j)$, $j \in \mathbb{N}$, для которого выполнено (4.35), но уже для достаточно больших r . В частности, верхняя линейная плотность множества $E_\varepsilon := E \cup E_0$ меньше, чем $\varepsilon/6$, а заключительное замечание из п. 4 об окружностях, проходящих через нормальные точки, не лежащие уже в E_ε , остается в силе в следующей форме: *для любой точки $z' \in \mathbb{C}$, $|z'| \geq 1$, существует некоторое число $\varepsilon(z') \in (0, \varepsilon)$, при котором окружность $\partial D(z', \varepsilon(z')|z'|)$ не пересекать исключительное множество E_ε .*

6. От интегралов $I(z)$ к функциям u и u_T . Пусть u — функция из условия Теоремы 3. Исходя из рассуждений п. 1, всегда можем считать, что носители мер ν и ν_T не содержат точки 0. Поскольку мера Рисса ν конечного типа при порядке ρ , то функция u допускает представление Вейерштрасса–Адамара рода $p = [\rho]$ с гармонической в \mathbb{C} добавкой h_u (см. [21, 4.2]):

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} e_p(z, \zeta) d\nu(\zeta) + h_u(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.42)$$

При этом число q , определенное в (4.1), связано с p по правилу

$$q = \begin{cases} p = [\rho], & \text{если } \rho \text{ — нецелое,} \\ \rho - 1 = p - 1, & \text{если } \rho \text{ — целое.} \end{cases}$$

Положим теперь

$$u_T(z) := \int_{\mathbb{C}} e_p(z, \zeta) d\nu_T(\zeta) + h_u(z) + v_\rho(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.43)$$

где по определению $v_\rho(z) \equiv 0$, если ρ — нецелое, и

$$v_\rho(z) := \operatorname{Re} \frac{z^\rho}{\rho} \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{1}{\zeta^\rho} - \frac{1}{(T\zeta)^\rho} \right) d\nu(\zeta), \quad \text{если } \rho \text{ — целое, } \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.44)$$

Функция u_T определена корректно, так как, во-первых, интеграл в правой части (4.43) — ни что иное, как канонический потенциал Вейрштрасса–Адамара по мере ν_T конечного типа при порядке ρ (см. (4.14) и [21, 4.2]), а во-вторых, при целом ρ интеграл в (4.44) конечен. Действительно, из оценки (4.23) следует

$$\left| \int_{|\zeta| \geq R} \left(\frac{1}{\zeta^\rho} - \frac{1}{(T\zeta)^\rho} \right) d\nu(\zeta) \right| \leq \rho 2^\rho \int_{|\zeta| \geq R} \left| 1 - \frac{T\zeta}{\zeta} \right| \frac{1}{|\zeta|^\rho} d\nu(\zeta),$$

где по условию (4.6) правая часть стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$. При этом функция v_ρ по построению (4.44), как и h_u , гармоническая. Следовательно, по построению (4.43) u_T — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_T .

Из вида (4.2) субгармонических ядер Вейрштрасса–Адамара рода q и p , а также из представлений (4.42) и (4.43)–(4.44) соотв. для u и u_T сразу получаем

$$u_T(z) - u(z) \equiv \int_{\mathbb{C}} e_q(z, \zeta) d(\nu_T - \nu)(\zeta) = I(z),$$

где $I(z)$ — интеграл из (4.15). А для него в предыдущем пункте **5** уже делался вывод, что при любом выборе числа $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$|u_T(z) - u(z)| = |I(z)| \leq \varepsilon |z|^\rho \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \setminus E_\varepsilon, \quad (4.45)$$

где верхняя линейная плотность исключительного множества E_ε не превышает ε . Тем самым главная часть Теоремы 3 доказана.

Соотношения (4.8) сразу следуют из (4.45) и из заключительного замечания в конце п. **5** об окружностях, не пересекающих E_ε , по принципу максимума для субгармонических функций. Наконец, последнее утверждение о типе и индикаторе функции u_T — очевидное следствие из (4.8), и Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Как показывают представления (4.43)–(4.44), построение функции u_T по функции u вполне конструктивно.

Замечание 2. Если вместо первого условия в (4.6) допустить выполнение его неасимптотического аналога $\inf_{\zeta \in \mathbb{C}} |T\zeta|/|\zeta| > 0$, то из него сразу следует и условие «прообраз каждого ограниченного множества при отображении T ограничен».

В заключение перенесем Теорему 3 на целые функции.

Теорема 4 (частичная формулировка в [23, Следствие 1]). *Пусть $f \neq 0$ — целая функция с последовательностью нулей $\text{Zero}_f = (\lambda_k) =: \Lambda$ конечной верхней плотности при порядке ρ и задана последовательность $\Gamma = (\gamma_k) \subset \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Если сходится ряд (4.5) и $\liminf_{k \rightarrow \infty} |\gamma_k|/|\lambda_k| > 0$, то найдется целая функция g с $\text{Zero}_g = \Gamma$, для которой при любом числе $\varepsilon > 0$ существует такое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{C}$ верхней линейной плотности $\leq \varepsilon$, что*

$$|\log |g(z)| - \log |f(z)|| \leq \varepsilon |z|^\rho \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C} \setminus E_\varepsilon.$$

При этом если f конечного типа при порядке ρ , то функция g такая же, а индикаторы роста функций f и g совпадают.

Доказательство. Перейдем сначала от целой функции f к «близкой» целой функции \tilde{f} с последовательностью простых нулей $\text{Zero}_{\tilde{f}} = (\tilde{\lambda}_k) =: \tilde{\Lambda}$. По сильно ослабленной версии Теоремы 1 такую функцию \tilde{f} можно подобрать так, что

$$|\log |\tilde{f}(z)| - \log |f(z)|| \leq \text{const.} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C} \setminus \tilde{E}, \quad (4.46)$$

где множество \tilde{E} можно покрыть множеством кругов с конечной суммой радиусов и при этом $|\tilde{\lambda}_k - \lambda_k| \leq 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$ (достаточно выбрать $\beta \equiv 1$). При этом условие сходимости ряда (4.5) выполнено и после замены Λ на $\tilde{\Lambda}$. Действительно, отбрасывая тривиальный случай конечной последовательности Λ , имеем $|\tilde{\lambda}_k/\lambda_k| \rightarrow 1$ при $k \rightarrow +\infty$. Следовательно, при достаточно большом k_0

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{|\tilde{\lambda}_k|^\rho} \left| 1 - \frac{\gamma_k}{\tilde{\lambda}_k} \right| &\leq \left(\max_{k \geq k_0} \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right|^{\rho-1} \right) \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{|\lambda_k|^\rho} \frac{|\lambda_k - \gamma_k| + |\tilde{\lambda}_k - \lambda_k|}{|\lambda_k|} \\ &\leq \text{const.} \left(\sum_{k \geq k_0} \frac{1}{|\lambda_k|^\rho} \left| 1 - \frac{\gamma_k}{\lambda_k} \right| + \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{|\lambda_k|^{\rho+1}} \right); \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|\gamma_k|}{|\tilde{\lambda}_k|} > 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Здесь предпоследняя сумма сходится по условию, а последняя сумма сходится, так как Λ — последовательность конечной верхней плотности при порядке ρ .

Теперь можем рассмотреть отображение $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, определенное по правилу $T\lambda_k = \gamma_k$ и $Tz \equiv z$ при $z \notin \tilde{\Lambda}$. Тогда по определению (1.1) целочисленная мера n_Γ есть ни что иное, как T -сдвиг целочисленной меры $n_{\tilde{\Lambda}}$, т. е. $n_\Gamma = (n_{\tilde{\Lambda}})_T$, а сходимость первой суммы в (4.47) и последнее соотношение там же означают, что для меры $\nu := n_{\tilde{\Lambda}}$ выполнены соотв. второе и первое условия в (4.6). Кроме того, последнее соотношение из (4.47) в силу специфики отображения T , сдвигающего в каждом круге лишь конечное число точек, обеспечивает то, что прообраз ограниченного множества ограничен. Следовательно, по Теореме

3, примененной к субгармонической функции $u := \log |\tilde{f}|$, найдется субгармоническая функция u_T с мерой Рисса n_T , для которой выполнено (4.7), равно как и остальные заключения Теоремы 3. Но из целочисленности меры Рисса n_T функции u_T следует существование такой целой функции g с $Z_{\text{го}_g} = \Gamma$, что $u_T = \log |g|$. Последнее вместе с (4.46) завершает доказательство Теоремы 4.

Список литературы

- [1] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Физматгиз, Москва (1956), 632 с.
- [2] *А. А. Гольдберг*, Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения. IV. — *Матем. сб.* (1965), т. 66(108), с. 411–457.
- [3] *И. Ф. Красичков-Терновский*, Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней. — *Матем. сб.* (1966), т. 70(112), с. 198–230; — *Матем. сб.* (1966), т. 71(113), с. 405–419.
- [4] *И. Ф. Красичков-Терновский*, Инвариантные подпространства аналитических функций. I, II. Спектральный синтез на выпуклых областях. — *Матем. сб.* (1972), т. 87(129), № 4, с. 459–489; — *Матем. сб.* (1972), т. 88(130), № 1, с. 3–30.
- [5] *Б. Н. Хабибуллин*, Разложение целых функций конечного порядка на эквивалентные множители. — В сб.: *Вопросы аппроксимации функций вещественного и комплексного переменного*, Башкирский филиал АН СССР, Уфа (1983), с. 161–181; English transl.: *B. N. Khabibullin, Decomposition of Entire Functions of Finite Order into Equivalent Factors. — Ten Papers in Russian* (1989), Transl., II. Ser., AMS, vol. 142, p. 61–72.
- [6] *В. С. Азарин*, О лучах вполне регулярного роста целой функции. — *Матем. сб.* (1969), т. 79(121), с. 463–476.
- [7] *В. С. Азарин*, О разложении целой функции конечного порядка на сомножители, имеющие заданный рост. — *Матем. сб.* (1973), т. 90(132), с. 225–230.
- [8] *В. С. Азарин*, Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. — *Матем. сб.* (1979), т. 108(150), с. 147–167.
- [9] *А. Ф. Гришин*, О регулярности роста субгармонических функций. — *Теория функций, функциональный анализ и их приложения* (1968), вып. 6, с. 3–29; (1969), вып. 7, с. 59–84; (1969), вып. 8, с. 32–48.
- [10] *И. Ф. Красичков-Терновский*, О свойствах однородности целых функций конечного порядка. — *Матем. сб.* (1967), т. 72(114), с. 412–419.

- [11] *Б. Н. Хабибуллин*, Оценки снизу и свойства однородности субгармонических функций. — Рукопись депонир. в ВИНТИ (1984), № 1604-84, 34 с.
- [12] *Б. Н. Хабибуллин*, Оценки снизу и свойства однородности субгармонических функций. — В сб.: *Исследования по теории аппроксимации функций*, Башкирский филиал АН СССР, Уфа (1984), с. 148–159.
- [13] *Б. Н. Хабибуллин*, Распределение нулей целых функций и выметание. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Харьков (1993), 322 с.
- [14] *Б. Н. Хабибуллин*, Распределение нулей целых функций и выметание. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Уфа (1993), 18 с.
- [15] *Л. Шварц*, Анализ. Т. I. Наука, Москва (1967), 824 с.
- [16] *Б. Н. Хабибуллин*, Сравнение субгармонических функций по их ассоциированным мерам. — *Матем. сб.* (1984), т. 125(167), № 4(12), с. 522–538.
- [17] *В. В. Напалков*, *М. И. Соломещ*, Оценка изменения целой функции при сдвигах ее нулей. — *Доклады РАН* (1995), т. 342, № 6, с. 739–741.
- [18] *М. И. Соломещ*, Операторы типа свертки в некоторых пространствах аналитических функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Уфа (1995). 110 с.
- [19] *Б. Н. Хабибуллин*, Наилучшая аппроксимация целой функции целой функцией с простыми нулями. — В сб.: *Тезисы докладов конференции молодых ученых*, Башкирский филиал АН СССР, Уфа (1985), с. 177.
- [20] *B. N. Khabibullin, E. G. Kudasheva*, Variations of entire (subharmonic) function under perturbations of its zero set (Riesz measure). — In: *Abstracts of the Conference dedicated to the centennial of B. Ya. Levin*, Ukraine, Kharkov (August 14–17, 2006), p.
- [21] *Хейман У., Кеннеди П.*, Субгармонические функции. Мир, Москва (1980), 304 с.
- [22] *Хабибуллин Б. Н.*, Аппроксимационная теорема для целых функций экспоненциального типа и устойчивость нуль-последовательностей. — *Матем. сб.* (2004), т. 195, № 1, с. 143–156.
- [23] *Khabibullin B. N.*, Closeness of subharmonic and entire functions, stability of completeness of exponential systems, spectral synthesis. — In: *Second International Conference “Mathematical Analysis and Economics”. Book of Abstracts*, Sumy–Kharkiv–Kiev (2003), p. 24–25.
- [24] *Ransford T. J.*, Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995), 232 p.

Башкирский государственный университет
450074, Уфа, ул. Фрунзе, 32

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112

E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru

Web-site: <http://math.bsunet.ru/khb>