АВТОРЕФЕРАТ статьи

УДК 517.53 + 517.574

Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II

Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова

Пусть Ω — ограниченная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(\Omega)$ — пространство голомофных в Ω функций; $\mathcal{P}$ — семейство субгармонических функций в Ω. Пусть $H_{\mathcal{P}}(\Omega)$ — класс функций $f \in H(\Omega)$, для которых имеет место оценка $|f(z)| \leqslant C_f \exp p_f(z)$ для всех $z \in \Omega$, где $p_f \in \mathcal{P}$, а C_f — постоянная. Получены условия, при которых заданная последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$ является подпоследовательностью нулей для различных классов $H_{\mathcal{P}}(\Omega)$ в том смысле, что найдется функция $f \in H_{\mathcal{P}}(\Omega)$, обращающаяся в нуль на Λ с учетом кратности. Результаты, как правило, и метод новые уже в случае, когда $\Omega = \mathbb{D}$ — единичный круг, и даже для систем $\mathcal{P}$ из радиальных мажорант $p(z) = p(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$.

Пусть $S \subset \Omega$ и $d_\Omega(S)$ — евклидово расстояние от S до границы Ω, $d_\Omega(z) := d_\Omega(\{z\})$; $\quad \ell(S;\Omega) := \sup\limits_{z,w\in S} \inf\limits_{l(z,w)\subset\Omega} \dfrac{\text{длина}\, l(z,w)}{d_\Omega\bigl(l(z,w)\bigr)}$ — это *энтропия линейной связности* S в Ω, где inf взят по всем спрямляемым дугам $l(z,w)$ с концами $z, w \in S$.

Общие результаты второй части работы о подпоследовательностях нулей для классов типа $H_{\mathcal{P}}(\Omega)$ и их устойчивости при малых «шевелениях» охватывают, к примеру, для весьма частного случая системы $\mathcal{P}$, порожденной одной функцией $p \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_p, следующие весовые классы голоморфных функций:

$$H_{p+\log}(\Omega) := \{f \in H(\Omega)\colon \exists c_f, C_f \geqslant 0,\ |f(z)| \leqslant C_f \bigl(d_\Omega(z)\bigr)^{-c_f} e^{p(z)},\ z \in \Omega\};$$
$$H^1_p(\Omega) := \{f \in H(\Omega)\colon \exists c_f \in (0,1), \exists C_f \geqslant 0,\ |f(z)| \leqslant C_f e^{c_f p(z)},\ z \in \Omega\};$$
$$A^\infty_p(\Omega) := \{f \in H(\Omega)\colon \exists c_f, C_f \geqslant 0,\ |f(z)| \leqslant C_f e^{c_f p(z)},\ z \in \Omega\}.$$

Приведем типичный результат для алгебры $A^\infty_p(\Omega)$ для $p \geqslant 0$ при условии, что *существует число $\varepsilon \in (0,1)$ и постоянная $C > 0$, для которых*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\bigl(z + \varepsilon d_\Omega(z) e^{i\theta}\bigr)\,d\theta + \log\Bigl(1 + \frac{1}{d_\Omega(z)}\Bigr) \leqslant Cp(z) + C, \quad \textit{при всех } z \in \Omega.$$

Пусть $\Sigma := \{S_k\}$ — семейство непересекающихся борелевских предкомпактных подмножеств S_k в Ω, $k = 1, 2, \dots$, покрывающее Λ и удовлетворяющее условиям

$$\limsup_{k\to\infty} \ell(S_k;\Omega) < +\infty, \quad \limsup_{k\to\infty} \frac{n_\Lambda(S_k)}{\nu_p(S_k)} < +\infty; \quad n_\Lambda(S) \text{ — \textit{число точек} } \lambda_k \textit{ в } S.$$

Тогда Λ — подпоследовательность нулей для алгебры $A^\infty_p(\Omega)$.

Результаты работы точны во всяком случае для некоторых типов весовых алгебр голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D}$. Для пространств типа $H_{p+\log}(\Omega)$ и $H^1_p(\Omega)$, а также более общих весовых классов голоморфных функций, не являющихся алгебрами, результаты принципиально новые. Рассмотрены и ситуации знакопеременных функций $p \in \mathcal{P}$, ранее никогда не затрагивавшиеся. Природа семейства Σ во всех утверждениях также достаточно произвольна.