УДК ???

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ВЫМЕТАНИЕ

Б. Н. Хабибуллин[1]

Введение

Данная статья представляет собой изложение подготовленного для Международной конференции «Теория операторов. Комплексный анализ. Математическое моделирование» (Волгодонск, 5–9 сентября 2005) фрагмента доклада. В докладе в сжатой форме в терминах выметания линейных функционалов и двойственного представления суперлинейных функционалов на проективном пределе векторных решеток была дана абстрактная трактовка ряда задач теории функций комплексных переменных (см. [1–4]), включающих в себя описание множеств (не)единственности и нулевых множеств в весовых пространствах голоморфных функций. Там же предполагалось, но не удалось изложить в полном объеме движение в обратном направлении: абстрактной постановке упомянутых задач придать форму, более тесно и явно связанную с их теоретико-функциональной природой. За этой общей схемой закреплялось название *метода выметания*.

Здесь излагается только «легкая» часть метода выметания, позволяющая находить для конкретных весовых пространств голоморфных функций бесконечные наборы достаточных условий для множеств единственности и необходимых условий для нулевых множеств. Применения к значительно более трудным, как правило, задачам получения нетривиальных необходимых условий для множеств единственности или достаточных условий для нулевых множеств здесь не затрагиваются, поскольку их изложение потребовало бы весьма существенного увеличения объема статьи. По той же причине

---

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 03-01-00033, и государственной программы РФ «Поддержка ведущих научных школ», грант НШ-1528.2003.1.

в данной работе не рассматриваются задачи представления мероморфных функций как частного голоморфных функций из определенных весовых пространств, несмотря на то, что метод выметания хорошо зарекомендовал себя при решении таких задач (см. обзор [5]).

1. Основные понятия, постановки задач и выметание

Далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — классы всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел или их геометрические интерпретации.

Пусть Ω — область в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathrm{Hol}(\Omega)$ обозначаем векторное пространство над $\mathbb{C}$ всех голоморфных в Ω функций. Пусть $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ — расширенная вещественная ось с естественной упорядоченностью и очевидными алгебраическими операциями при неопределенности для $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, но при соглашении $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. По функции $M\colon \Omega \to \mathbb{R}_\infty$ введем класс

$$\mathrm{Hol}(\Omega, M) := \Bigl\{ f \in \mathrm{Hol}(\Omega)\colon \sup_{z\in\Omega} \bigl|f(z)\bigr| \exp\bigl(-M(z)\bigr) < +\infty \Bigr\}. \tag{1}$$

Положительным дивизором на Ω (см. [6; гл. IV]) называем функцию $\Lambda\colon \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ с носителем $\operatorname{supp}\Lambda$, являющимся аналитическим множеством чистой коразмерности 1, непрерывную на множестве всех регулярных точек из $\operatorname{supp}\Lambda$. Для $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ функция $\mathrm{Zero}_f\colon \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, равная кратности нуля функции f в каждой точке из Ω, — *дивизор нулей* функции f на Ω. Если вторая проблема Кузена разрешима в области Ω, то для любого положительного дивизора Λ (пишем $\Lambda \geqslant 0$) найдется функция $f_\Lambda \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ с дивизором нулей $\mathrm{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$. Всякую такую функцию f_Λ будем называть *определяющей функцией дивизора* Λ. Если для дивизора $\Lambda \geqslant 0$ на Ω в некотором классе $L \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$ найдется определяющая функция дивизора Λ, то Λ — *дивизор нулей для* L. При дополнительном условии замкнутости L относительно вычитания дивизор $\Lambda \geqslant 0$ на Ω называем *дивизором неединственности для* L, если существует ненулевая функция $f \in L$ с дивизором нулей $\mathrm{Zero}_f \geqslant \Lambda$ на Ω; в противном случае Λ — *дивизор единственности* для L.

В случае $n = 1$, т. е. на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, вторая проблема Кузена разрешима в любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, а аналитические множества в Ω — это дискретные множества без предельных точек в Ω. Поэтому каждому положительному дивизору Λ можно сопоставить последовательность точек $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ из Ω, в которой каждая точка $\lambda \in \Omega$ встречается ровно $\Lambda(\lambda)$ раз. Такую последовательность обозначаем тем же символом Λ, что и дивизор. Обратно, по каждой последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}$ без точек сгущения в Ω однозначно строится положительный дивизор Λ, равный в каждой точке $\lambda \in \Omega$ числу повторений этой точки λ в последовательности Λ. Для взаимно однозначного соответствия между дивизорами и последовательностями, отходя от традиционного понимания последовательности как функции натурального или целого аргумента, две последовательности считаются равными, если тождественно равны соответствующие им дивизоры. Естественно, в случае $n = 1$ вместо дивизора нулей и дивизора (не)единственности будем вести речь о последовательности нулей и последовательности (не)единственности.

Рассматриваются следующие две задачи:

Задача 1 (о нулевых дивизорах). *При каких условиях дивизор* $\Lambda \geqslant 0$ *на области* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *— дивизор нулей для* $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$ *из* (1)?

Задача 2 (о дивизорах неединственности). *При каких условиях дивизор* $\Lambda \geqslant 0$ *на* Ω *— дивизор неединственности для* $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$?

В терминах определяющей дивизор Λ функции f_Λ этим двум задачам можно придать единую трактовку: *при каких условиях найдется функция-мультипликатор* $g_0 \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, *без нулей в* Ω *для задачи* 1 *и ненулевая для задачи* 2, *с которой* $f_\Lambda g_0 \in \mathrm{Hol}(\Omega, M)$? По определению (1) пространства $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$ существование требуемой функции-мультипликатора g_0 означает выполнение неравенства $\log|f_\Lambda| + \log|g_0| \leqslant M + C$ на Ω, где C — постоянная. Постоянную C всегда можно «внести» в функцию g_0, если перейти к неравенству

$$\log|f_\Lambda| + \log|g| \leqslant M, \tag{2}$$

где $g := g_0 e^{-C}$ по-прежнему не имеет нулей в Ω для задачи 1 и ненулевая для задачи 2. Поскольку в данной статье будет рассматриваться только более легкая проблема поиска необходимых условий по задачам 1 и 2, то допустимо ослаблять условия на искомую функцию g, но не слишком сильно, чтобы не скатиться до тривиальности. Так, требование отсутствия нулей у функции g можно ослабить до условия плюригармоничности и даже гармоничности функции $h := \log|g|$ на Ω по задаче 1 (при $n = 1$ плюригармоничность = гармоничность) или соответственно плюрисубгармоничности и даже просто субгармоничности для h на Ω по задаче 2 (при $n = 1$ плюрисубгармоничность = субгармоничность). Обобщенной форме задач 1 и 2 можно придать, несколько ослабляя требования, абстрактную трактовку, если неравенство (2) переписать в виде

$$h := \log|g| \leqslant M - \log|f_\Lambda| =: x. \tag{3}$$

Здесь можно считать, что x — это элемент упорядоченного множества X с отношением порядка $\leqslant$, а выясняются условия существования элемента $h \leqslant x$ из некоторого заранее оговоренного подмножества $H \subset X$. Для фиксированного функционала $\delta\colon H \to \mathbb{R}$ рассмотрим величину $\sup\{\delta(h)\colon h \leqslant x,\ h \in H\}$ (ср. с [7; III.1.3. V–VI]). Тогда существование элемента $h \in H$, для которого, как в (3), $h \leqslant x$, эквивалентно условию $-\infty < \sup\{\delta(h)\colon h \leqslant x,\ h \in H\}$, поскольку для пустого подмножества $\varnothing \subset \mathbb{R}_\infty$ имеем $\sup\varnothing := -\infty$, $\inf\varnothing := \infty$. Для двойственной интерпретации последней трактовки дадим

Определение 1. Пусть $(X, \leqslant)$ — упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$, $x \in X$, $H \subset X$ и $\delta\colon H \to \mathbb{R}$ — функционал на H. Возрастающий функционал μ на упорядоченном множестве $H \cup \{x\}$ с индуцированным из X отношением порядка $\leqslant$ и со значениями в $\mathbb{R}_\infty$ называем *выметанием функционала δ относительно H и x*, если $\delta(h) \leqslant \mu(h)$ для любого $h \in H$. Обозначаем это как $\delta \prec_H^x \mu$.

Определение выметания функционала здесь отличается от определения в [7; III.2.1. V] (ср. с понятием положительного ростка) и близкó к определению из [8; гл. XI, § 3, O41]. Основой применения выметания к получению необходимых условий в задачах 1 и 2 является следующее элементарное

Предложение 1. *Пусть $(X, \leqslant)$ — упорядоченное множество, $H \subset X$, $x \in X$ и $\delta\colon H \to \mathbb{R}$ — функционал на H. Тогда*

$$\sup\{\delta(h) : h \leqslant x,\, h \in H\} \leqslant \inf\{\mu(x) : \delta \prec_H^x \mu\}. \tag{4}$$

В частности, для существования $h \in H$, удовлетворяющего неравенству $h \leqslant x$, необходимо, чтобы для любого фиксированного функционала $\delta\colon H \to \mathbb{R}$ выполнялось соотношение $\inf\{\mu(x)\colon \delta \prec_H^x \mu\} > -\infty$.

$\lhd$ Если левая часть в (4) равна $-\infty$, то неравенство (4) очевидно. Если же она конечна, то существуют элемент $h \in H$, удовлетворяющий неравенству $h \leqslant x$. Действуя на $h \in H$ произвольным выметанием μ функционала δ относительно H и x, получаем $\delta(h) \leqslant \mu(h)$, а затем, в силу возрастания μ, $\mu(h) \leqslant \mu(x)$. Отсюда правая часть в (4) не меньше $\delta(h)$ при $h \leqslant x$, и (4) доказано.

Заключительное утверждение — очевидное следствие (4). $\rhd$

Замечание. По поводу возможности поставить знак равенства в (4) можно обратиться, например, к [7; III.1.3. VII], [1; теоремы 2, 3], [9; Введение, 2°, теорема Хёрмандера], [3; теоремы 5.1, 6.1], [8; гл. XI, § 3, T46], но здесь эти результаты нам не потребуются.

В следующем параграфе адаптируем предложение 1 для прямого применения к задачам 1 и 2.

2. Возвращение к дивизорам нулей и дивизорам неединственности

Пусть $S \subset \mathbb{C}^n$, а $\mathbb{R}_\infty^S$ — множество всех функций на S со значениями в $\mathbb{R}_\infty$ и отношением порядка $(f \leqslant g) \iff \bigl(f(z) \leqslant g(z)$ во всех точках $z \in S\bigr)$. Через $\mathscr{M}(S)$ обозначаем множество всех вещественных борелевских регулярных мер на борелевском множестве S; $\mathscr{M}^+(S)$ — подконус в $\mathscr{M}(S)$, состоящий из положительных мер; $\mathscr{M}_c^+(S)$ — подконус в $\mathscr{M}^+(S)$ из мер с компактным носителем в S.

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$. Не умаляя общности, всюду далее будем считать, что область Ω содержит начало координат, т. е. $0 \in \Omega$.

Через $\mathrm{sh}(\Omega)$ обозначаем выпуклый конус всех субгармонических функций на Ω, а $\mathrm{h}(\Omega) \subset \mathrm{sh}(\Omega)$ — пространство всех гармонических функций в Ω. Через $\mathrm{psh}(\Omega)$ обозначаем выпуклый конус всех плюрисубгармонических функций на Ω, а $\mathrm{ph}(\Omega) \subset \mathrm{psh}(\Omega)$ — пространство всех плюригармонических функций в Ω.

В качестве упорядоченного множества X из § 1 выберем $\mathbb{R}_\infty^\Omega$. В роли $H \subset \mathbb{R}_\infty^\Omega$ рассматриваем пространства $\mathrm{ph}(\Omega)$ или $\mathrm{h}(\Omega)$ по задаче 1, а также выпуклые конусы $\mathrm{psh}_0(\Omega) := \{h \in \mathrm{psh}(\Omega)\colon\ h(0) \neq -\infty\}$ или $\mathrm{sh}_0(\Omega) := \{h \in \mathrm{sh}(\Omega)\colon h(0) \neq -\infty\}$ по задаче 2. Функционалом δ в определении 1 назначим меру Дирака δ_0, т. е. вероятностную меру с носителем в нуле, которую можно трактовать как функционал на

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sh}_0(\Omega) & \supset & \mathrm{h}(\Omega) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{psh}_0(\Omega) & \supset & \mathrm{ph}(\Omega), \end{array} \tag{5}$$

действующий по правилу $\delta_0(h) = h(0) = \int h\,d\delta_0$.

Определение 2 ([10–12]). Мера $\mu \in \mathscr{M}_c^+(\Omega)$ называется *мерой* (соответственно *плюримерой*) *Аренса — Зингера* в области Ω для точки 0, если

$$h(0) \leqslant \int h\,d\mu \tag{6}$$

для каждой функции $h \in \mathrm{h}(\Omega)$ (соответственно $h \in \mathrm{ph}(\Omega)$). Если (6) выполнено для всех $h \in \mathrm{sh}_0(\Omega)$ (соответственно $h \in \mathrm{psh}_0(\Omega)$), то μ — *мера* (соответственно *плюримера*) *Йенсена* в области Ω для точки 0.

Через $\mathscr{AS}(\Omega)$ и $\mathscr{J}(\Omega)$ (соответственно $\mathscr{PAS}(\Omega)$ и $\mathscr{PJ}(\Omega)$) обозначаем класс всех мер (соответственно плюример) Аренса — Зингера и Йенсена в Ω для нуля.

В силу (5) очевидны включения

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{PAS}(\Omega) & \supset & \mathscr{AS}(\Omega) \\ \cup & & \cup \\ \mathscr{PJ}(\Omega) & \supset & \mathscr{J}(\Omega) \end{array}$$

— всегда строгие за исключением верхней и нижней строк, где при $n = 1$ и только в этом случае имеют место равенства.

Для $\mu \in \mathscr{M}_c^+(\Omega)$ отображение $F \mapsto \int_* F\,d\mu \in \mathbb{R}_\infty$, где $F \in \mathbb{R}_\infty^\Omega$ и $\int_*$ — нижний интеграл, задает возрастающий функционал на $\mathbb{R}_\infty^\Omega$ (см. [13; § 2.4]). Пусть теперь в роли элементов $x \in X$ из предыдущего параграфа выступают функции $F \in \mathbb{R}_\infty^\Omega$. (Плюри)меры Аренса — Зингера и Йенсена — частный случай выметания из определения 1, если рассматривать нижние интегралы по ним как функционалы на $\mathbb{R}_\infty^\Omega$. Так, если $\mu \in \mathscr{AS}(\Omega)$ (соответственно $\mu \in \mathscr{J}(\Omega)$, $\mu \in \mathscr{PAS}(\Omega)$, $\mu \in \mathscr{PJ}(\Omega)$), то $\delta_0 \prec_H^F \mu$ для любой функции $F \in \mathbb{R}_\infty^\Omega$, где $H = \mathrm{h}(\Omega)$ (соответственно $H = \mathrm{sh}_0(\Omega)$, $H = \mathrm{ph}_0(\Omega)$, $H = \mathrm{psh}_0(\Omega)$). В связи с задачами 1 и 2 наибольший интерес здесь представляют функции F, заданные в виде (см. (2))

$$F := M - u, \quad M\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad u \in \mathrm{sh}(\Omega). \tag{7}$$

В этих соглашениях заключительная часть предложения 1 дает

Предложение 2. *Если для функций M и u из* (7) *при некоторой функции $h \in \mathrm{h}(\Omega)$ (соответственно $h \in \mathrm{sh}_0(\Omega)$, $h \in \mathrm{ph}(\Omega)$, $h \in \mathrm{psh}_0(\Omega)$) выполнено $u + h \leqslant M$ в $\mathbb{R}_\infty^\Omega$, то найдется постоянная $C \in \mathbb{R}$, с которой*

$$\int u\,d\mu \leqslant \int_* M\,d\mu + C$$

для всех $\mu \in \mathscr{AS}(\Omega)$ (соответственно $\mu \in \mathscr{J}(\Omega)$, $\mu \in \mathscr{PAS}(\Omega)$, $\mu \in \mathscr{PJ}(\Omega)$).

Следствие 1 (о нулевых дивизорах)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — область, в которой разрешима вторая проблема Кузена, а $f_\Lambda \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ — определяющая функция дивизора $\Lambda \geqslant 0$ на Ω, т. е. $\mathrm{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$. Если Λ — дивизор нулей для пространства $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$, где M из* (7), *то найдется постоянная $C \in \mathbb{R}$, с которой неравенство*

$$\int \log|f_\Lambda|\,d\mu \leqslant \int_* M\,d\mu + C \tag{8}$$

выполнено для всех мер $\mu \in \mathscr{PAS}(\Omega) \supset \mathscr{AS}(\Omega)$.

Пусть $\mathbb{B}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ (единичного радиуса с центром в нуле), $\overline{\mathbb{B}}$ — его замыкание. Для числа $\varepsilon > 0$ по определению мера $m^{(\varepsilon)}$ получена сужением меры Лебега m на шар $\varepsilon\mathbb{B}$ с последующей нормировкой $m^{(\varepsilon)}(\varepsilon\mathbb{B}) = 1$ за счет числового множителя. При $\varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset \Omega$ меру $\mu \in \mathscr{M}_c^+(\Omega)$ называем *выметанием меры* $m^{(\varepsilon)}$ (относительно конуса $\mathrm{psh}(\Omega)$ в области Ω) и пишем $\mu \succ_{\mathrm{psh}} m^{(\varepsilon)}$, если

$$\int h\,dm^{(\varepsilon)} \leqslant \int h\,d\mu \quad \bigl(\forall\, h \in \mathrm{psh}(\Omega)\bigr). \tag{9}$$

Следствие 2 (о дивизорах неединственности)**.** *Если Λ — дивизор неединственности для $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$ в условиях следствия 1 и, кроме того, функция M ограничена снизу в некоторой окрестности шара $\varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset \Omega$, то найдется постоянная C, с которой неравенство* (8) *выполнено для всех мер $\mu \in \mathscr{J}(\Omega)$ и для всех выметаний $\mu \succ_{\mathrm{psh}} m^{(\varepsilon)}$.*

Это следствие при рассмотрении выметаний $\mu \succ_{\mathrm{psh}} m^{(\varepsilon)}$ требует некоторых дополнительных рассуждений. Но здесь на них не останавливаемся, поскольку в следующем параграфе эксплуатируются только субгармонические версии следствий 1 и 2. Отметим лишь, что использование выметания (9) обусловлено особенностями случая $h(0)=0$, обойти который в классе $\operatorname{psh}(\Omega)$ часто затруднительно и требует применения в каждом отдельном случае специальных приемов. В классе же $\operatorname{sh}(\Omega)$ это удается за счет ограниченности снизу функции M в окрестности некоторого шара $\varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ с помощью гармонического продолжения функции h в шар $\varepsilon\mathbb{B}$ с последующим вычитанием из нее достаточно большой постоянной. Поэтому неравенство (8) выполняется для всех мер Йенсена.

3. Субгармонические двойственные версии следствий 1 и 2

Выпишем сначала некоторые определения и результаты из [14].

Определение 3 [14]. Функция $V:\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\to[-\infty,+\infty)$ называется *функцией Аренса — Зингера* (для точки $0\in\Omega$) *на* Ω, если выполнены следующие три условия:

1) существует компакт K в Ω такой, что и $V\equiv 0$ вне K;
2) функция V субгармоническая в $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$;
3) выполнено соотношение

$$V(z)\leqslant\begin{cases}-\log|z|+O(1), & z\to 0 \quad \text{при } n=1,\\ |z|^{2-2n}+O(1), & z\to 0 \quad \text{при } n>1.\end{cases}$$

Если функция Аренса — Зингера на Ω неотрицательна всюду на $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$, то называем ее *функцией Йенсена* (для точки $0\in\Omega$) *на* Ω.

Класс всех функций Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) на Ω обозначаем $P_J(\Omega)$ (соответственно $P_{AS}(\Omega)$).

Двойственность между классами функций Аренса — Зингера (соответственно Йенсена) и классами мер Аренса — Зингера (соответственно Йенсена) определяют следующие положения:

а) для

$$h_n(z):=\begin{cases}\log|z|, & n=1,\\ -|z|^{2-2n}, & n>1,\end{cases}$$

отображение

$$\mu\mapsto\int_{\Omega\setminus\{0\}}\big(h_n(z-w)-h_n(z)\big)\,d\mu(w)=:V_\mu(z),\quad z\in\mathbb{C}^n,$$

— аффинная биекция класса $\mathscr{AS}(\Omega)$ на класс $P_{AS}(\Omega)$ (соответственно класса $\mathscr{J}(\Omega)$ на класс $P_J(\Omega)$);

b) для каждой функции $u \in \mathrm{sh}_0(\Omega)$ с мерой Рисса ν_u при любой мере $\mu \in \mathscr{AS}(\Omega)$ справедлива обобщенная формула Пуассона — Йенсена

$$u(0) = \int u\, d\mu - \int V_\mu\, d\nu_u.$$

Предположим теперь, что функция M из (7) субгармоническая в области Ω с мерой Рисса ν_M. Используя выписанные выше факты a) и b), соотношение (8) в предположении, что $0 \notin \operatorname{supp}\Lambda$, для любой функции $V \in P_{AS}(\Omega)$ (соответственно для любой функции $V \in P_J(\Omega)$) может быть переписано в виде

$$\int V\, d\nu_{\log|f_\Lambda|} \leqslant \int V\, d\nu_M + C', \tag{10}$$

где $\nu_{\log|f_\Lambda|}$ — мера Рисса функции $\log|f_\Lambda| \in \mathrm{sh}_0(\Omega)$, а $C' := C - \log|f_\Lambda| + M(0)$ — конечная постоянная, не зависящая от $V \in P_{AS}(\Omega)$ (соответственно от $V \in P_J(\Omega)$), если постоянная C в (8) изначально не зависела от мер $\mu \in \mathscr{AS}(\Omega)$ (соответственно от мер $\mu \in \mathscr{J}(\Omega)$).

Естественно попытаться «расшифровать» меру $\nu_{\log|f_\Lambda|}$ так, чтобы она выражалась исключительно через дивизор Λ и не содержала упоминание о неоднозначно определенной функции f_Λ (с точностью до голоморфного множителя, не имеющего нулей). Это позволяет сделать формула Пуанкаре — Лелона [15, 16.3]:

$$\nu_{\log|f_\Lambda|}(S) = c_n \int_{S\cap\operatorname{supp}\Lambda} \Lambda(z)\, d\mathscr{H}_{2n-2}(z), \quad S \subset \mathbb{C}^n, \tag{11}$$

где $\mathscr{H}_{2n-2}$ — $(2n-2)$-мера Хаусдорфа (см. [13]), а нормирующий множитель имеет вид

$$c_n := \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \frac{(n-2)!}{2\pi^{n-1}}, & n > 1. \end{cases}$$

В частности, в случае $n = 1$, когда дивизор Λ отождествляется с последовательностью Λ как в § 1, в полном соответствии с (11) мера $\nu_{\log|f_\Lambda|}(S)$ равна числу точек из Λ, попавших в множество S.

Исходя из этого неравенство (10) можно записать в виде

$$c_n \int_{\operatorname{supp}\Lambda} V(z)\Lambda(z)\, d\mathscr{H}_{2n-2}(z) \leqslant \int V\, d\nu_M + C, \tag{12}$$

где постоянная C' обозначена как C. В частности, при $n = 1$ неравенство (12) для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ имеет вид

$$\sum_k V(\lambda_k) \leqslant \int V\, d\nu_M + C. \tag{13}$$

Таким образом, отмеченная двойственность в виде (11)–(13) позволяет переформулировать следствия 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — область, в которой разрешима вторая проблема Кузена, $\Lambda \geqslant 0$ — дивизор на Ω с носителем вне нуля, а $M\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_M. Если Λ — дивизор нулей для пространства* $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$, *то*

$$\sup_{V\in P_{AS}(\Omega)} \left(c_n \int_{\operatorname{supp}\Lambda} V(z)\Lambda(z)\, d\mathscr{H}_{2n-2}(z) - \int V\, d\nu_M \right) < +\infty.$$

В частности, если $n = 1$ и $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность нулей для пространства $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$, *то*

$$\sup_{V\in P_{AS}(\Omega)} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int V\, d\nu_M \right) < +\infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если*

$$\sup_{V\in P_{J}(\Omega)} \left(c_n \int_{\operatorname{supp}\Lambda} V(z)\Lambda(z)\, d\mathscr{H}_{2n-2}(z) - \int V\, d\nu_M \right) = +\infty,$$

то Λ — дивизор единственности для пространства $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$.

В частности, если $n = 1$ и $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в Ω, то из соотношения

$$\sup_{V\in P_{J}(\Omega)} \left(\sum_k V(\lambda_k) - \int V\, d\nu_M \right) = +\infty$$

следует, что Λ — последовательность единственности для $\mathrm{Hol}(\Omega, M)$.

В случае, когда область Ω — это все пространство $\mathbb{C}^n$, в частности, плоскость $\mathbb{C}$, из определения 3 легко видеть, что функции Аренса — Зингера и функции Йенсена остаются таковыми при гомотетии и поворотах. Это применительно к одной функции V дает

Следствие 3. *Если в условиях теоремы* 1 *область* Ω *— это* $\mathbb{C}^n$, *а* Λ *— дивизор нулей для пространства* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}^n, M)$, *то для любой функции Аренса — Зингера* V *для* $\mathbb{C}^n$ *справедливо соотношение*

$$\limsup_{t\to+\infty}\left(c_n\int_{\operatorname{supp}\Lambda} V(z/t)\Lambda(z)\,d\mathscr{H}_{2n-2}(z)-\int V(z/t)\,d\nu_M(z)\right)<+\infty.$$

Когда $n=1$, *т. е.* $\Omega=\mathbb{C}$, *а* $\Lambda=\{\lambda_k\}$ *— последовательность нулей для пространства* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}, M)$, *то для любой функции Аренса — Зингера* V *для* $\mathbb{C}$ *имеет место соотношение*

$$\limsup_{w\to\infty,\,w\in\mathbb{C}}\left(\sum_k V(\lambda_k/w)-\int V(z/w)\,d\nu_M(z)\right)<+\infty.$$

Следствие 4. *Если в условиях теоремы* 1 *область* Ω *— это* $\mathbb{C}^n$, *а для некоторой функции* $V\in P_J(\mathbb{C}^n)$ *справедливо соотношение*

$$\limsup_{t\to+\infty}\left(c_n\int_{\operatorname{supp}\Lambda} V(z/t)\Lambda(z)\,d\mathscr{H}_{2n-2}(z)-\int V(z/t)\,d\nu_M(z)\right)=+\infty,$$

то Λ *— дивизор единственности для пространства* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}, M)$.

Когда $n=1$, $\Omega=\mathbb{C}$, $\Lambda=\{\lambda_k\}$ *— последовательность точек в* $\mathbb{C}$, *и для некоторой функции Йенсена* V *для* $\mathbb{C}$ *имеет место соотношение*

$$\limsup_{w\to\infty,\,w\in\mathbb{C}}\left(\sum_k V(\lambda_k/w)-\int V(z/w)\,d\nu_M(z)\right)=+\infty,$$

то Λ *— последовательность единственности для* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}, M)$.

Аналогичные следствия нетрудно сформулировать и когда область Ω — это шар $\mathbb{B}$ или единичный круг на плоскости.

Приведенные в этом параграфе утверждения актуализируют задачу конструирования функций Аренса — Зингера и Йенсена, что и будет содержанием последнего параграфа.

4. Построение функций Аренса — Зингера и Йенсена

Инверсия точки $z \in \mathbb{C}^n$ — это точка $z^\star := z/|z|^2$, инверсия подмножества $S \subset \mathbb{C}^n$ — это $S^\star := \{z^\star : z \in S\}$, ∂S — граница S.

За исходный объект построения функции Аренса — Зингера можно взять *произвольную субгармоническую функцию* $v \not\equiv -\infty$ *в* $\mathbb{C}$. При этом для простоты будем считать функцию v непрерывно дифференцируемой. Пусть K — компакт в области Ω, содержащий точку 0. Дальнейшие возможные шаги при построении следующие:

1. Пусть U — объединение тех открытых компонент связности множества $\{z \in \mathbb{C}^n : v(z) < 0\}$, которые пересекаются с множеством $(\mathbb{C}^n \setminus K)^\star$. Полагаем

$$v_1(z) := \begin{cases} v(z) & \text{при} \quad z \notin U, \\ 0 & \text{при} \quad z \in U. \end{cases} \tag{14}$$

По известной теореме о склейке субгармонических функций [16, теорема 2.18] v_1 — субгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$.

2. Следующий шаг — преобразование Кельвина

$$v_1^\star(z) := \frac{1}{|z|^{2n-2}}\, v_1\big(z/|z|^2\big), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

функции v_1 относительно единичной сферы $\partial\mathbb{B}$, которое сохраняет субгармоничность [17, лемма 9.13].

3. При $0 < \varepsilon < 1$ и шаре $\varepsilon\overline{\mathbb{B}} \subset \Omega$, используя преобразование Кельвина относительно сферы $\partial(\varepsilon\mathbb{B})$, полагаем

$$V_\varepsilon(z) := \begin{cases} v_1^\star(z) & \text{при } |z| > \varepsilon, \\ \dfrac{\varepsilon^{2n-2}}{|z|^{2n-2}}\, v_1^\star\Big(\dfrac{\varepsilon^2 z}{|z|^2}\Big) & \text{при } 0 < |z| \leqslant r. \end{cases}$$

Функция V_ε субгармонична в шаре εB и вне его замыкания. Но субгармоничность может нарушаться на сфере $\partial(\varepsilon\mathbb{B})$.

4. Для того чтобы подправить функцию V_ε при $|z|=\varepsilon$ положим

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(z) :&= \frac{1}{|z|}\left(\frac{\mathrm{d}V_\varepsilon(tz)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1-0} - \frac{\mathrm{d}V_\varepsilon(tz)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1+0}\right) \\ &= -\frac{2}{|z|}\,\frac{\mathrm{d}v_1^\star(tz)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1} - \frac{2n-2}{|z|}\,v_1^\star(z) \end{aligned}$$

— сумма производных по внешней нормали от V_ε соответственно на границах шара $\varepsilon\mathbb{B}$ и дополнения $\mathbb{C}^n\setminus\varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, и пусть $A_\varepsilon := \sup_{|z|=\varepsilon} a_\varepsilon(z)$. Если $A_\varepsilon \leqslant 0$, то полагаем $V=V_\varepsilon$. В противном случае переходим к

5. В обозначениях $a^+ := \max\{a,0\}$ и $\log^+ t := \max\{\log t, 0\}$ положим

$$V(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon A_\varepsilon}\,V_\varepsilon(z) + \log^+\dfrac{\varepsilon}{|z|} & \text{при } n=1, \\ \dfrac{2n-2}{\varepsilon^{2n-1}A_\varepsilon}\,V_\varepsilon(z) + \left(\dfrac{1}{|z|^{2n-2}} - \dfrac{1}{\varepsilon^{2n-2}}\right)^+ & \text{при } n>1. \end{cases} \tag{15}$$

Последняя функция V и есть функция Аренса — Зингера, по построению тождественно равная нулю вне компакта $K\subset\Omega$, т. е. выполнено условие 1) определения 3. Условие 3) того же определения следует из вида функции V. Осталось убедиться в выполнении условия 2) определения 3, т. е. доказать субгармоничность функции V вне нуля. Субгармоничность V вне сферы $\partial(\varepsilon\mathbb{B})$ следует из п. 3 и ввиду гармоничности в шаре $\varepsilon\mathbb{B}$ последнего слагаемого в определении (15) функции V. Для доказательства субгармоничности V в окрестности сферы $\partial(\varepsilon\mathbb{B})$ может быть использована следующая лемма, доказанная в [18, лемма 3.8.1] (см. также [19, лемма 4.1]) и несколько позже в [20, теоремы 3.1–3.3] (см. также [21, теорема Бланше]).

Лемма. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^m$ и гиперповерхность S класса C^1 разделяет Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2. Пусть непрерывная в Ω функция u дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega_1\cup\Omega_2$, а ее сужения на $\Omega_j\cup S$ принадлежат классу C^1, $j=1,2$. Если*

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} \leqslant 0 \quad \text{на } S, \tag{16}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_j}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали к области Ω_j, $j=1,2$, то u — субгармоническая в Ω функция.

В (15) добавочные слагаемые подобраны именно так, что при $u := V$, $S := \partial(\varepsilon\mathbb{B})$, $\Omega_1 := \varepsilon\mathbb{B}$ и $\Omega_2 := \mathbb{C}^n \setminus \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ выполнено условие (16) леммы, в чем нетрудно убедиться непосредственными вычислениями. Недостаточная гладкость функции V преодолевается стандартной в теории субгармонических функций аппроксимацией функции V убывающей последовательностью функций, полученных гладкой регуляризацией функции V (см. [7, 16]).

Для построения по схеме пп. 1–5 функции Йенсена необходимо изменить лишь шаг 1 на

1′. В отличие от п. 1 положим функцию

$$v_1 := (v - c)^+ \quad \text{на} \quad \mathbb{C}^n, \tag{17}$$

где постоянная c столь велика, что функция $v_1 \geqslant 0$ тождественно равна нулю на множестве $(\mathbb{C}^n \setminus K)^\star$.

Остальные шаги дословно повторяют пп. 2–5 и в итоге ввиду выбора v_1 дают функцию Аренса — Зингера $V \geqslant 0$ из (15), которая согласно определению 3 — функция Йенсена.

Замечание. В случае $n = 1$ возможно и обобщение конструкции пп. 1–5 на пути замены круга радиуса ε с центром в нуле из п. 3 некоторой односвязной областью $D \ni 0$, а преобразования Кельвина (инверсии) $v_1^\star(\varepsilon^2/\bar{z})$ в п. 3 — заменой переменной, основанной на конформном отображении $D \setminus \{0\}$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, где $\overline{D}$ — замыкание D.

Применения частных случаев описанной общей схемы к конкретным весовым пространствам голоморфных функций в специальных областях (на плоскости, в круге, в шаре, в $\mathbb{C}^n$) уже давались в [18, 19, 22], а дальнейшие применения общей схемы в конкретных ситуациях предполагается изложить в ином месте.

Литература

1. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов // В сб.: Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. I.—Уфа: ИМ с ВЦ УНЦ РАН, 1996.—С. 122–131.
2. *Khabibullin B. N.* Dual approach to certain questions for the weighted spaces of holomorphic functions // Israel Math. Conference Proceedings («Entire Functions in Modern Analysis», Tel-Aviv, 1997).—2001.—V. 15.—P. 207–219.
3. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Серия матем.—2001.—Т. 65, № 4.—С. 835–852.

4. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Серия матем.—2001.—Т. 65, № 5.—С. 167–190.
5. *Khabibullin B. N.* The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results // Математическая физика, анализ, геометрия.—2002.—Т. 9, № 2.—С. 146–167.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Т. 2.—М.: Наука, 1985.—464 с.
7. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.—368 с.
8. *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы.—М.: Мир, 1973.—328 с.
9. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1976.—256 с.
10. *Gamelin T. W.* Uniform Algebras and Jensen Measures.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.—162 p.
11. *Ransford T. J.* Jensen measures.—Approximation, Complex Analysis and Potential Theory (Montreál, Qc, 2000). NATO Sci. Sér. II. Math-Phys-Chem 37.—Dordrecht: Kluwer, 2001.—P. 221–237.
12. *Cole B. J., Ransford T. J.* Jensen measures and harmonic measures // J. Reine und Angew. Math.—2001.—V. 541.—P. 29–53.
13. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры.—М.: Наука, 1987.—760 с.
14. *Хабибуллин Б. Н.* Критерии (суб)гармоничности и продолжение (суб)гармонических функций // Сиб. мат. журн.— 2003.—Т. 4, № 4.—С. 905–925.
15. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества.—М.: Наука, 1985.—272 с.
16. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.—М.: Мир, 1980.—304 с.
17. *Helms L. L.* Introduction to potential theory.—N.Y. etc.: Wiley-Interscience, 1969.—282 p.
18. *Хабибуллин Б. Н.* Распределение нулей целых функций и выметание: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Харьков: ФТИНТ АН Украины, 1993.—298 с.
19. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 4.—С. 603–616.
20. *Blanchet P.* On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions // Complex Variables.—1995.—T. 26.—C. 311–322.
21. *Riihentaus J.* Subharmonic functions, mean value inequality, boundary behavior, nonintegrability and exeptional sets // arXiv:math/0312508.—2003.—13 p. (a talk at the Inter. Workshop on Potential Theory and Free Boundary Flows, Kiev, 19–27 August 2003).
22. *Хабибуллин Б. Н.* Оценки объема нулевых множеств голоморфных функций // Изв. вузов. Математика.—1992.—№ 3 (358).—С. 58-63.

Уфа, Башкирский государственный университет
E-mail: khabib-bulat@mail.ru