УДК 517.53 + 517.54 + 517.57 + 517.98

Б. Н. Хабибуллин

Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В терминах гармонических мер, функций Грина, выметания, мер Йенсена и др. получены различные общие условия, при которых Λ — последовательность нулей для некоторой голоморфной функции из заданного весового пространства голоморфных функций в Ω. В аналогичных терминах рассмотрен вопрос о представлении мероморфной в Ω функции в виде отношения двух голоморфных функций без общих нулей из заданного весового пространства.

Библиография: 38 названий.

1 Введение

Пусть H — некоторое весовое пространство голоморфных функций в области Ω комплексной плоскости, выделяемое поточечными ограничениями на эти функции посредством некоторой системы мажорант. Настоящая работа нацелена на построение единой схемы решения трех задач:

- какие последовательности точек Λ могут быть последовательностью нулей некоторой функции из H, т. е. последовательностью нулей для H?

- в каких случаях множество неединственности Λ для H является одновременно и последовательностью нулей для H?

- когда мероморфная в Ω функция может быть представлена отношением двух голоморфных функций из H без общих нулей?

Статья представляет собой расширенное и модернизированное изложение единой схемы и общих результатов из [1] с исправлениями отдельных неточностей, погрешностей и пробелов в доказательствах. Результаты работы носят общий характер. Это наряду с необъятностью материала об описаниях нулевых множеств для различных классов голоморфных функций и о представлении мероморфных функций в конкретных областях (круг, плоскость и пр.) послужило причиной воздержаться здесь от обсуждения каких бы то ни было известных ранее результатов в этих направлениях. Метод исследования, используемый в настоящей статье, основан на выметании мер, функций или, более общо́, функционалов. Он хорошо зарекомендовал себя в серии работ автора применительно к родственным задачам описания множеств неединственности для весовых пространств голоморфных в Ω функций и представления мероморфных в Ω функций в виде частного двух голоморфных функций, вообще говоря, с общими нулями, заданного роста вблизи границы области Ω. Это касается как общей схемы, так и ряда конкретных результатов, формулируемых в традиционных терминах. В контексте применения к приведенным в начале трем задачам метод выметания являются уже новым и, кроме как в [1], ранее нигде не использовался. В последующих исследованиях, частично анонсированных в [2], предполагается применить наш общий подход к конкретным весовым пространствам H голоморфных функций в единичном круге, история вопроса для которых будет изложена достаточно детально. Дальнейшие переспективы — применения к весовым пространствам H целых функций и к пространствам H голоморфных функций в многосвязных областях (кольцо и т. п.), для чего изложение ведется для произвольных или, как минимум, конечносвязных областей Ω.

§ 1.1. Некоторые обозначения, соглашения и понятия

Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соотв. всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел или их геометрические интерпретации.

Для отображения $f\colon A \to B$ и $b \in B$ пишем $f \equiv b$ *на* A', если f тождественно равно b на подмножестве $A' \subset A$; в противном случае $f \not\equiv b$ на A'. Как обычно, для $A' \subset A$ через $f\ \big|_{A'}$ обозначаем сужение f на A'. При $A, B \subset [-\infty, +\infty]$ функция f *возрастающая* (соответственно[1] *убывающая*), если для любых $x_1, x_2 \in A$ из $x_1 \leqslant x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соотв. $f(x_1) \geqslant f(x_2)$). “Положительность” (соотв. “отрицательность”) всегда означает “$\geqslant 0$” (соотв. “$\leqslant 0$”). Для $a \in [-\infty, +\infty]$ (соотв. для функции $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$), как обычно, по определению $a^+ := \max\{a, 0\}$ (соотв. $f^+\colon x \longmapsto \max\{f(x), 0\}$, $x \in X$).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots,$ — не более чем счетная последовательность точек в области Ω на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без предельных точек в Ω. Среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. Возможно, $\Lambda = \varnothing$ — пустое множество. С каждой последовательностью Λ связываем целочисленную положительную *считающую меру* n_Λ на Ω по правилу

$$n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1, \quad S \subset \Omega, \tag{1.1}$$

— число точек λ_k, содержащихся в S. Обозначаемая тем же символом, что и последовательность Λ, функция $\Lambda\colon z \longmapsto n_\Lambda\bigl(\{z\}\bigr)$, $z \in \Omega$, — *дивизор* последовательности Λ. Отходя от традиционного понимания последовательности как функции натурального или целого аргумента, считаем, что последовательность Λ совпадает с последовательностью $\Gamma = \{\gamma_k\}$, или равна ей (пишем $\Lambda = \Gamma$), если для соответствующих им дивизоров $\Lambda(z) \equiv \Gamma(z)$ при всех $z \in \Omega$. Иначе говоря, каждая *последовательность точек* рассматривается как представитель

[1]Далее используем сокращение “соотв.”.

некоторого класса эквивалентности, состоящего из последовательностей в Ω с одинаковыми дивизорами. *Включение* $\Lambda \subset \Gamma$ означает, что $\Lambda(z) \leqslant \Gamma(z)$ для всех $z \in \Omega$. *Объединение* $\Lambda \cup \Gamma$ и *пересечение* $\Lambda \cap \Gamma$ последовательностей Λ и Γ через дивизоры задается соотв. тождествами $(\Lambda \cup \Gamma)(z) \equiv \Lambda(z) + \Gamma(z)$ и $(\Lambda \cap \Gamma)(z) \equiv \min\bigl\{\Lambda(z), \Gamma(z)\bigr\}$, $z \in \Omega$.

Носитель $\operatorname{supp}\Lambda$ *для последовательности точек* Λ — это носитель соответствующего ей дивизора. Запись $\lambda \in \Lambda$ (соотв. $\lambda \notin \Lambda$) означает, что $\lambda \in \operatorname{supp}\Lambda$ (соотв. $\lambda \notin \operatorname{supp}\Lambda$). Для подмножества $B \subset \mathbb{C}$ пишем $\Lambda \subset B$, если $\operatorname{supp}\Lambda \subset B$.

Через $\operatorname{Hol}(\Omega)$ обозначаем класс всех голоморфных функций в области $\Omega \subset \mathbb{C}$.

По функции $M \colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ определим класс функций

$$\operatorname{Hol}(\Omega; M) := \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\Omega) \colon \sup_{z\in\Omega} \frac{|f(z)|}{\exp M(z)} < +\infty \right\}. \tag{1.2}$$

Пусть $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ на Ω. Последовательность нулей функции f в Ω, перенумерованную с учетом кратности, обозначаем через Zero_f. Последовательность Λ — **последовательность нулей** для подкласса $H \subset \operatorname{Hol}(\Omega)$, если найдется функция $f \in H$ такая, что $\Lambda = \operatorname{Zero}_f$. Функция $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ *обращается в нуль на* Λ, если $\Lambda \subset \operatorname{Zero}_f$ (пишем $f(\Lambda) = 0$). Последовательность Λ — **подпоследовательность нулей** для подкласса $H \subset \operatorname{Hol}(\Omega)$, если существует функция $f \not\equiv 0$ на Ω из класса H, обращающаяся в нуль на Λ.

Через m обозначаем *лебегову меру* на $\mathbb{C}$, а иногда, когда это ясно из контекста, и ее сужения на подмножества $\mathbb{C}$.

Пишем $S \Subset \Omega$ и говорим, что S *предкомпактно* в Ω, если *замыкание* $\overline{S}$ подмножества $S \subset \Omega$ — компакт в Ω.

Для области $D \Subset \mathbb{C}$, через $g_D(\cdot, z)$ обозначаем *продолженную функцию Грина* для D с полюсом в точке $z \in D$ [3, 5.7.4], т. е. $g_D(\zeta, z) \equiv 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и $g(\zeta, z)$ — субгармоническая функция от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$. Соответственно, $\omega_D(z, \cdot)$ — *гармоническая мера в точке* z *относительно области* $D \Subset \mathbb{C}$ [3, 5.7.1].

Всюду далее предполагаем, что область $\Omega \subset \mathbb{C}$ содержит начало координат, т. е. $0 \in \Omega$, что не умаляет общности ни одного утверждения работы.

Как обычно, $C(S)$ — пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на множестве $S \subset \mathbb{C}$. Через $\mathcal{M}(S)$ обозначаем множество всех вещественных борелевских мер (мер Радона) на борелевском множестве S (на $C(S)$); $\mathcal{M}^+(S)$ — подконус в $\mathcal{M}(S)$, состоящий из положительных борелевских мер; $\mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(S)$ — подкласс $\mathcal{M}^+(S)$, состоящий из мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега m.

Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Как обычно, $\operatorname{supp}\mu$ — *носитель* меры μ. Мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ *сосредоточена на* борелевском подмножестве $B \subset \Omega$, если $\mu(\Omega \setminus B) = 0$. Для борелевского множества $B \subset \Omega$, *сужение* μ *на* B обозначается $\mu\bigm|_B$.

Через $D(z, t)$ обозначаем открытый круг радиуса $t \in \mathbb{R}$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$. Если $t \leqslant 0$, то $D(z, t) = \varnothing$. По определению $D(t) := D(0, t)$.

Единичный круг $D(1)$ обозначаем через $\mathbb{D}$.

Для $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ и $D(t) \subset \Omega$ используем обозначение $\nu^{\mathrm{rad}}(t) := \nu\bigl(D(t)\bigr)$.

Через $\operatorname{Har}(\Omega)$ обозначаем пространство всех гармонических функций на Ω, а $SH(\Omega)$ — конус всех субгармонических функций на Ω. Функция, тождественно равная $-\infty$ на Ω, по определению принадлежит $SH(\Omega)$. Для $u \in SH(\Omega)$ при $u \not\equiv -\infty$ на Ω через[2] $\nu_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u$ обозначаем *меру Рисса* функции u.

Как обычно, $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — множество всех локально интегрируемых по мере Лебега m функций $F\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$. Последовательность $\{w_n\}$ из $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ сходится в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ к некоторой функции $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, если последовательность $\int_K |w_n - w| \, \mathrm{d}m$ стремится к нулю при $n \to \infty$ для каждого компакта $K \subset \Omega$.

Через $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$ обозначаем функцию евклидова расстояния между точками или множествами в $\mathbb{C}$. В частности, $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — евклидово расстояние от точки $z \in \mathbb{C}$ до *границы* $\partial\Omega$ области Ω.

Всюду далее мера $m^{(r)} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ — это сужение меры Лебега m на круг $D(r)$, нормированное условием $m^{(r)}\bigl(D(r)\bigr) = 1$, т. е.

$$m^{(r)} := \frac{1}{m^{\mathrm{rad}}(r)}\, m \bigm|_{D(r)} . \tag{1.3}$$

В частности, по определению субгармонической функции

$$v(z) \leqslant \bigl(v * m^{(r)}\bigr)(z), \quad v \in SH(\Omega), \tag{1.4}$$

если $D(r) \Subset \Omega$ (здесь и ниже $*$ обозначает оператор свертки).

Пусть функция $\sigma\colon \Omega \to (0, +\infty)$ удовлетворяет ограничениям

$$0 < \sigma(z) < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega), \quad \forall z \in \Omega. \tag{1.5}$$

Тогда для функции $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ можем определить функцию

$$F^{(\sigma)}(z) := \int_{D(\sigma(z))} F(z + w) \, \mathrm{d}m^{(\sigma(z))}(w), \quad z \in \Omega, \tag{1.6}$$

которая при дополнительном условии непрерывности σ также непрерывна.

Всюду далее область в $\mathbb{C}$ *регулярна*, если она регулярна для задачи Дирихле.

Определение 1. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, а $S_0 \Subset \Omega$ и $0 \in S_0$. Систему *регулярных* областей $\mathcal{U}_{S_0}(\Omega) \subset \{D \Subset \Omega\colon\ S_0 \subset D\}$ называем *регулярной оптимально исчерпывающей в* Ω (с центром S_0), если для любых двух областей Ω_1 и Ω_2 при $S_0 \subset \Omega_1 \Subset \Omega_2 \subset \Omega$ выполнены два условия:

1) *найдется область $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ такая, что $\Omega_1 \Subset D \Subset \Omega_2$ и каждая непустая ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus D$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \Omega_2$;*

2) *для любой области $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ существует область $\Omega_D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ такая, что $\Omega_1 \Subset \Omega_D \Subset \Omega_2$, а объединение $\Omega_D \cup D$ также принадлежит $\mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$;*

и, кроме того, эта система *условно инвариантна относительно сдвига в* Ω, т. е. из $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$, $w \in \mathbb{C}$ и $S_0 \subset D + w \Subset \Omega$ следует, что $D + w \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$.

Если $S_0 = \{0\}$, то используем обозначение $\mathcal{U}_0(\Omega) := \mathcal{U}_{\{0\}}(\Omega)$.

[2]Здесь Δ — оператор Лапласа, действующий в смысле теории распределений.

Пример 1. Связное объединение D конечного числа открытых кругов регулярно тогда и только тогда, когда в дополнении этого объединения нет одноточечных компонент связности [4, Теорема 4.2.2]. Вследствие этого простым примером регулярной оптимально исчерпывающей системы областей может служить *специальная система* $\mathcal{U}^d_{S_0}(\Omega)$ *всевозможных связных объединений* $D \supset S_0$ *конечного числа кругов* $D(z_j, t_j) \Subset \Omega$, $j = 1, \dots, m$, *исключая те области* D, *в дополнении* $\mathbb{C} \setminus D$ *которых есть изолированные точки.*

Выполнение первого условия Определения 1, а также условная инвариантность относительно сдвига в Ω для системы областей $\mathcal{U}^d_{S_0}(\Omega)$ достаточно прозрачны. По поводу второго заметим, что если для некоторой области $\Omega' \in \mathcal{U}^d_{S_0}(\Omega)$ при $\Omega_1 \Subset \Omega' \Subset \Omega_2$ объединение $\Omega' \cup D$ все же не принадлежит системе $\mathcal{U}^d_{S_0}(\Omega)$, то путем объединения области Ω' с конечным числом кругов достаточно малого радиуса, содержащих изолированные точки дополнения $\mathbb{C} \setminus (\Omega' \cup D)$, легко получить область Ω_D, требуемую во втором условии.

§ 1.2. Теорема о последовательностях нулей

Для того чтобы сформулировать основной результат о последовательностях нулей для весовых пространств голоморфных функций вида (1.2), потребуется понятие субгармонического ядра, подходящего для меры на Ω.

Пусть B — борелевское подмножество в Ω и $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. По определению $L^1(B, \mathrm{d}\nu)$ — множество всех функций $g\colon B \to [-\infty, +\infty]$, интегрируемых по мере $\nu\big|_B$, т. е. таких, что $\int_B |g| \,\mathrm{d}\nu < +\infty$.

Определение 2. Пусть B — борелевское подмножество в Ω, а борелевская функция $h\colon B \times \Omega \to \mathbb{R}$ локально ограничена и для каждой фиксированной точки $\zeta \in B$ функция $h(\zeta, \cdot)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *гармоническая на* Ω. Тогда функцию

$$k\colon (\zeta, z) \longmapsto \log|\zeta - z| + h(\zeta, z), \quad \forall (\zeta, z) \in B \times \Omega, \tag{1.7}$$

будем называть *субгармоническим ядром на* $B \times \Omega$ (*с гармонической компонентой* h *и несущим множеством* B).

Далее, пусть мера $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ *сосредоточена на* B. Субгармоническое ядро k на $B \times \Omega$ называем *подходящим для* ν, если для каждой точки $z \in \Omega$ найдется подобласть $D_z \Subset \Omega$, содержащая точку z, и функция $g_z \in L^1\big((\Omega \setminus D_z) \bigcap B, \mathrm{d}\nu\big)$, для которых выполнено неравенство

$$\sup_{w \in D_z} \big|k(\zeta, w)\big| \leqslant g_z(\zeta), \quad \forall \zeta \in (\Omega \setminus D_z) \bigcap B. \tag{1.8}$$

Примеры часто встречающихся субгармонических ядер, подходящих для определенных классов мер на $\mathbb{D}$ и на $\mathbb{C}$, приведены в § 2.1.

Следуя [5], *n-связную область* $\Omega \subset \mathbb{C}$ определяем как область, в дополнении $\mathbb{C} \setminus \Omega$ которой $n-1$ ограниченная в $\mathbb{C}$ компонента связности. В частности, область Ω *односвязна*, если в $\mathbb{C} \setminus \Omega$ нет ограниченных компонент связности.

Основной результат о последовательностях нулей для пространств (1.2) —

Теорема 1 (о последовательностях нулей). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — $(n+1)$-связная область, $n \geqslant 0$, и $0 \in \Omega$, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность точек в Ω и $0 \notin \Lambda$, а для $M \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_M выполнены следующие три условия:*

i) *функция M ограничена в открытой окрестности некоторого связного компакта $K_0 \subset \Omega$, содержащего 0;*

ii) *мера ν_M сосредоточена на борелевском подмножестве $B \subset \Omega$, а некоторое субгармоническое ядро k на $B \times \Omega$ — подходящее для ν_M;*

iii) *для функции*

$$Q_k^{\nu_M}(z) := \int_B \bigl(k(\zeta, 0) - k(\zeta, z)\bigr)^+ \, \mathrm{d}\nu_M(\zeta), \quad z \in \Omega, \tag{1.9}$$

найдется мажорирующая функция $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ на Ω, т. е. $Q_k^{\nu_M}(z) \leqslant Q(z)$ для почти всех (относительно меры Лебега m) точек $z \in \Omega$.

Пусть $\mathfrak{U}_{K_0}(\Omega)$ — регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром K_0.

I. *Допустим, что найдется постоянная C, с которой выполнено какое-либо из следующих двух утверждений:*

(z1) *для каждой области $D \in \mathfrak{U}_{K_0}(\Omega)$ выполнено неравенство*

$$\sum_k g_D(\lambda_k, 0) \leqslant \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) \, \mathrm{d}\nu_M(\zeta) + C; \tag{1.10}$$

(z2) *для некоторой голоморфной в Ω функции f_Λ с последовательностью нулей $\mathrm{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ для каждой области $D \in \mathfrak{U}_{K_0}(\Omega)$ выполнено*

$$\int_\Omega \log\bigl|f_\Lambda(z)\bigr| \, \mathrm{d}\omega_D(0, z) \leqslant \int_\Omega M(z) \, \mathrm{d}\omega_D(0, z) + C. \tag{1.11}$$

Тогда найдется число $b < n$ такое, что при любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей условию (1.5), Λ — **последовательность нулей** *для пространства $\mathrm{Hol}\bigl(\Omega; M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} + b^+ \log^+ |\cdot|\bigr)$, $\log|\cdot|\colon z \longmapsto \log|z|$, $z \in \Omega$.*

II. *Если Λ —* **подпоследовательность нулей** *для $\mathrm{Hol}(\Omega; M)$, то при некотором $b < n$ для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей условию (1.5), Λ —* **последовательность нулей** *для $\mathrm{Hol}\bigl(\Omega; M^{(\sigma)}+Q^{(\sigma)}+b^+ \log^+ |\cdot|\bigr)$.*

Слагаемое $b^+ \log^+ |\cdot|$ всюду можно убрать, если область Ω односвязна или внутренность ее дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$ непуста (в частности, если область Ω ограничена в $\mathbb{C}$). При этом если функция M или Q непрерывна на Ω, то функцию $M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)}$ всюду можно заменить соотв. на $M + Q^{(\sigma)}$ или на $M^{(\sigma)} + Q$, а если одновременно $M \in C(\Omega)$ и $Q \in C(\Omega)$, то и на функцию $M + Q$.

Утверждения последнего абзаца Теоремы 1 тривиальны. Так, для односвязной области Ω имеем $n=0$, откуда $b^+=0$. Случай непустой внутренности дополнения $\mathbb{C}\setminus\Omega$ рассмотрен при доказательстве Теоремы 1 в § 2.2, где Теорема 1 выводится из сформулированной там Основной Теоремы.

Для $M\in C(\Omega)$ в силу ее локальной равномерной непрерывности на Ω всегда можно подобрать функцию $\sigma\in C(\Omega)$, удовлетворяющую условию (1.5), столь малой, что $M^{(\sigma)}\leqslant M+1$ на Ω, и аналогично по отношению к $Q\in C(\Omega)$.

§ 1.3. О представлении мероморфных функций как частного голоморфных

Начиная с классических теорем Р. Неванлинны об описании последовательностей нулей для пространства H^∞ и о представлении мероморфной в круге функции с ограниченной характеристикой Неванлинны как частного двух ограниченных функций давно известны параллели (см. также [6]–[9])

1) между описаниями *последовательностей нулей* для весовых пространств голоморфных функций в области Ω и представлением мероморфной в области Ω функции f в виде отношения $f=g/h$ двух функций $g,h\in\operatorname{Hol}(\Omega)$ *без общих нулей* с заданными ограничениями на их рост вблизи границы $\partial\Omega$,

2) между описаниями *подпоследовательностей нулей* для таких весовых пространств и представлением мероморфной в области Ω функции f в виде отношения $f=g/h$ двух функций $g,h\in\operatorname{Hol}(\Omega)$, с заданными ограничениями на их рост вблизи $\partial\Omega$, но, возможно, уже и *имеющих общие нули.*

Аналогичные параллели с Теоремой 1 отражает и

Теорема 2 (о представлении мероморфных функций). *Пусть область Ω, функция M и система областей $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ такие же, как в Теореме 1, а $f=g/q$ — некоторое представление мероморфной в Ω функции f в виде отношения двух функций $g,q\in\operatorname{Hol}(\Omega)$ и $\max\bigl\{|g(0)|,|q(0)|\bigr\}\neq 0$.*

Допустим, что выполнено одно из следующих двух условий:

(r1) *существует постоянная C, с которой для каждой области $D\in\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$*

$$\int_\Omega \log\max\bigl\{|g(z)|,|q(z)|\bigr\}\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)\leqslant\int_\Omega M(z)\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)+C; \tag{1.12}$$

(r2) *$g\in\operatorname{Hol}(\Omega;M)$ и $q\in\operatorname{Hol}(\Omega;M)$.*

Тогда при некотором $b<n$ для любой функции $\sigma\in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничению (1.5), *найдутся функции $g_0,q_0\in\operatorname{Hol}\bigl(\Omega;M^{(\sigma)}+Q^{(\sigma)}+b^+\log^+|\cdot|\bigr)$* **без общих нулей**, *с которыми справедливо представление $f=g_0/q_0$ на Ω.*

При этом справедливы все упрощения из последнего абзаца Теоремы 1.

Теорема 2 тоже выводится в § 2.2 из Основной Теоремы.

Подробный обзор результатов о представлении мероморфных в $\mathbb{C}$ функций как частного целых функций заданного роста дан в работе [10] (см. также [9]).

2 Основная Теорема

§ 2.1. Субгармонические ядра и глобальное представление Рисса

Следующее Предложение 2.1 представляет собой глобальную версию классической теоремы Рисса о локальном представлении субгармонической функции в виде суммы логарифмического потенциала ее меры Рисса и некоторой гармонической функции [3, Теорема 3.9], [4, Теорема 3.7.9].

Предложение 2.1. *Пусть мера $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ сосредоточена на борелевском подмножестве B и субгармоническое ядро k на $B \times \Omega$ — подходящее для меры ν. Тогда интеграл*

$$U_k^\nu(z) := \int_B k(\zeta, z)\, \mathrm{d}\nu(\zeta), \quad z \in \Omega, \tag{2.1}$$

определяет субгармоническую на Ω функцию с мерой Рисса ν, а для каждой функции $M \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса $\nu_M = \nu$ имеет место представление

$$M = U_k^\nu + H \quad \text{на} \quad \Omega, \quad \text{где } H \in \mathrm{Har}(\Omega). \tag{2.2}$$

Для доказательства Предложения 2.1 будет использована

Теорема A ([11, Теорема 2.6.5])**.** *Пусть (T, μ) — пространство с σ-конечной мерой и Ω — область в $\mathbb{R}^d$. Допустим, что измеримая (относительно $\mu \otimes m$) функция $u\colon T \times \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ такова, что*

(i) *функция $x \longmapsto u(t, x)$ — субгармоническая на Ω для каждого $t \in T$;*

(ii) *существует $g \in L^1(T, \mathrm{d}\mu)$ такая, что $u(t, x) \leqslant g(t)$ при $t \in T$ и $x \in \Omega$.*

Тогда функция $U(x) := \int_T u(t, x)\, \mathrm{d}\mu(t)$, $x \in \Omega$, — субгармоническая на Ω.

Доказательство Предложения 2.1. Пусть $z \in \Omega$. Определение 2 обеспечивает существование подобласти $D_z \Subset \Omega$, $z \in D_z$, и некоторой функции $g_z \in L^1\bigl((\Omega \setminus D_z) \bigcap B, \mathrm{d}\nu\bigr)$, для которых выполнено неравенство (1.8). Представим интеграл (2.1) в виде суммы

$$U_k^\nu(w) = \int_{D_z \cap B} k(\zeta, w)\, \mathrm{d}\nu(\zeta) + \int_{(\Omega \setminus D_z) \cap B} k(\zeta, w)\, \mathrm{d}\nu(\zeta) = \int_{D_z \cap B} \log|\zeta - w|\, \mathrm{d}\nu(\zeta)$$
$$+ \int_{D_z \cap B} h(\zeta, w)\, \mathrm{d}\nu(\zeta) + \int_{(\Omega \setminus D_z) \cap B} k(\zeta, w)\, \mathrm{d}\nu(\zeta), \quad w \in D_z, \tag{2.3}$$

где h — гармоническая компонента субгармонического ядра k. Здесь первый интеграл в правой части — логарифмический потенциал меры $\nu\bigr|_{D_z \cap B}$ с компактным носителем. Следовательно, это субгармонической функция в $\mathbb{C}$ с мерой

Рисса $\nu\,\big|_{D_z\cap B}$. Гармоническая компонента ограничена на предкомпактном подмножестве $D_z\bigcap B \Subset \Omega$. Рассматривая в Теореме A в качестве (T,μ) пространство с конечной мерой $\bigl(D_z\bigcap B, \nu\,\big|_{D_z\cap B}\bigr)$, а в роли функции g достаточно большую постоянную, мажорирующую одновременно $\pm h$ равномерно по $w\in D_z$, убеждаемся, что второй интеграл в правой части (2.3) — одновременно субгармоническая и супергармоническая функция, т. е. гармоническая в D_z.

По Определению 2 субгармоническое ядро $k(\zeta,w)$ — гармоническая функция по второй переменной w в области D_z ввиду представления (1.7) при каждом $\zeta\in(\Omega\setminus D_z)\bigcap B$. Рассмотрим в Теореме A в качестве (T,μ) пространство с σ-конечной мерой $\bigl((\Omega\setminus D_z)\bigcap B, \nu\,\big|_{(\Omega\setminus D_z)\cap B}\bigr)$. По Определению 2 подходящего субгармонического ядра найдется функция $g_z\in L^1\bigl((\Omega\setminus D_z)\bigcap B, \mathrm{d}\nu\bigr)$, мажорирующая одновременно $\pm k$ на $(\Omega\setminus D_z)\bigcap B$ равномерно по $w\in D_z$. Ее выбираем в роли функции g в Теореме A. Тогда по Теореме A и третий интеграл в правой части (2.3) — одновременно субгармоническая и супергармоническая функция, т. е. гармоническая в D_z. Таким образом, для любой точки $z\in\Omega$ существует некоторая область $D_z\subset\Omega$, содержащая z, для которой функция $U_k^\nu\,\big|_{D_z}$ — субгармоническая в D_z с мерой Рисса $\nu\,\big|_{D_z}$. Но определения субгармонической функции и ее меры Рисса локальны, откуда следует, что $U_k^\nu\in SH\bigl(\bigcup_{z\in\Omega}D_z\bigr)=SH(\Omega)$ с мерой Рисса именно ν.

Если $M\in SH(\Omega)$ с мерой Рисса $\nu_M=\nu$, то в смысле теории распределений $\Delta(M-U_k^\nu)=\nu_M-\nu=0$. Следовательно, $M-U_k^\nu=:H$ — гармоническая функция на Ω по известной лемме Вейля [4, Лемма 3.7.1], что дает представление (2.2). •

Примеры. Ниже приведены часто использующиеся субгармонические ядра.

0. Функция $(\zeta,z)\longmapsto\log|\zeta-z|$ — подходящее субгармоническое ядро на $\Omega\times\Omega$ для всякой меры $\nu\in\mathcal{M}^+(\Omega)$ с компактным носителем в Ω.

1. Если для области Ω существует функция Грина g_Ω (граница $\partial\Omega$ — неполярное множество), то функции

$$(\zeta,z)\longmapsto -g_\Omega(\zeta,z)\quad\text{и}\quad(\zeta,z)\longmapsto -g_\Omega(\zeta,z)+\log|\zeta| \tag{2.4}$$

— субгармонические ядра соотв. на $\Omega\times\Omega$ и на $(\Omega\setminus\{0\})\times\Omega$. Эти ядра подходящие для мер $\nu\in\mathcal{M}^+(\Omega)$ при условии (см. [4, Theorem 4.5.4])

$$\int_\Omega g_\Omega(\zeta,0)\,\mathrm{d}\nu(\zeta)<+\infty.$$

2. Пусть $\Omega=\mathbb{D}$. Здесь используются множитель Бляшке, его варианты и псевдогиперболическое расстояние для $\mathbb{D}$:

$$B_\zeta(z):=\frac{|\zeta|}{\zeta}\,\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\,,\ \zeta\in\mathbb{D}\setminus\{0\}, z\in\mathbb{D},\ \text{но}\ |B_0(z)|:=|z|,$$

$$\overline{B}_\zeta(z):=\frac{\bar\zeta(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z}=|\zeta|\,B_\zeta(z),\quad \zeta\in\mathbb{D},\ z\in\mathbb{D},$$

$$\rho(\zeta,z):=\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\right|=\bigl|B_\zeta(z)\bigr|=\frac{1}{|\zeta|}\,\bigl|\overline{B}_\zeta(z)\bigr|.$$

Следующие функции — субгармонические ядра:

(B_0) Субгармоническое *ядро Бляшке* на $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ — функция

$$(\zeta,z)\longmapsto b_1(\zeta,z):=\log|B_\zeta(z)|=\log|\rho(\zeta,z)|=-g_{\mathbb{D}}(\zeta,z).$$

Оно подходящее для мер $\nu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{1^-}(1-t)\,\mathrm{d}\nu^{\mathrm{rad}}(t)<+\infty. \tag{2.5}$$

Аналогично, $(\zeta,z)\longmapsto \overline{b}_1(\zeta,z):=\log|\overline{B}_\zeta(z)|=-g_{\mathbb{D}}(z,\zeta)+\log|\zeta|$ — субгармоническое ядро на $(\mathbb{D}\setminus\{0\})\times\mathbb{D}$, подходящее для $\nu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, если одновременно с (2.5) выполнено условие

$$\int_0^{1/2}\frac{\nu^{\mathrm{rad}}(t)}{t}\,\mathrm{d}t<+\infty.$$

Это условие влечет за собой конечность интеграла $\int_0^{1/2}\log|\zeta|\,\mathrm{d}\nu(\zeta)$ и обеспечивает равенство $\nu\bigl(\{0\}\bigr)=0$.

($\overline{\mathrm{D}}_p$) Для целого $p\geqslant 0$ субгармоническое *ядро Джрбашяна–Нафталевича–Цудзи рода*[3] p с несущим множеством $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ — функция (см. [12]–[19])

$$\begin{aligned}(\zeta,z)\longmapsto \overline{d}_p(\zeta,z)&:=\log\bigl|\overline{B}_\zeta(z)\bigr|+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\operatorname{Re}\bigl(1-\overline{B}_\zeta(z)\bigr)^k\\&=\log\left|\frac{\bar\zeta(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z}\right|+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\operatorname{Re}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^k,\end{aligned} \tag{2.6}$$

которое при $p=0$ совпадает со вторым ядром из (2.4) для $\Omega=\mathbb{D}$. Такие ядра подходящие для мер $\nu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии

$$\int_0^{1^-}(1-t)^{p+1}\,\mathrm{d}\nu^{\mathrm{rad}}(t)+\int_0^{1/2}\frac{\nu^{\mathrm{rad}}(t)}{t}\,\mathrm{d}t<+\infty. \tag{2.7}$$

(H_2) Субгармоническое *ядро Горовица* (см. [20], [19]) на $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ — функция $(\zeta,z)\longmapsto h_2(\zeta,z):=\log\bigl|1-(1-B_\zeta(z))^2\bigr|$. Это ядро подходящее для мер $\nu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии $\int_0^{1^-}(1-t)^2\,\mathrm{d}\nu^{\mathrm{rad}}(t)<+\infty$.

(B_s) Для $0<s\leqslant 6$ субгармоническое *ядро Беллера* на $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ — функция $(\zeta,z)\longmapsto b_s(\zeta,z):=\log\bigl|1-(1-B_\zeta(z))^s\bigr|$ (см. [21], [19]), которое совпадает с ядром Горовица при $s=2$ и с ядром Бляшке при $s=1$. Такие ядра подходящие для мер $\nu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию $\int_0^{1^-}(1-t)^s\,\mathrm{d}\nu^{\mathrm{rad}}(t)<+\infty$.

[3] Для $q>p$, по определению $\sum\limits_{k=q}^{p}\cdots:=0$, $\prod\limits_{k=q}^{p}\cdots:=1$. Аналогично, $\sum\limits_{k\in\varnothing}\cdots:=0$, $\prod\limits_{k\in\varnothing}\cdots:=1$.

($\overline{\mathrm{B}}_s$) Для $s \geqslant 1$ субгармоническое *ядро Бомаша* с несущим множеством $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ — функция $\overline{b}_s(\zeta, z) := \log\bigl|1-(1-\overline{B}_\zeta(z))^s\bigr|$ (см. [22], [23]). Такие ядра подходящие для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии (2.7) с $p = s-1$.

(K_1) Субгармоническое *ядро Коренблюма* на $(\mathbb{D}\setminus\{0\})\times\mathbb{D}$ (см. [24], [19]) — функция $k_1(\zeta, z) := \log\bigl|B_\zeta(z)\bigr| + \log\dfrac{1}{|\zeta|}\operatorname{Re}\dfrac{\zeta/|\zeta|+z}{\zeta/|\zeta|-z}$. Это ядро подходящее для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии (2.7) с $p = 1$.

($\overline{\mathrm{D}}_\infty$) Для последовательности целых чисел $\{p_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, и возрастающей последовательности чисел $0 < r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant 1$ (конечной или бесконечной) субгармоническое *ядро Джрбашяна–Шамояна* (относительно этих двух последовательностей) на $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ — функция (см. (2.6) и [25, § 2])

$$(\zeta, z) \longmapsto d_\infty(\zeta, z) := \begin{cases} \overline{d}_{p_n}(\zeta, z), \text{ если } r_n \leqslant |\zeta| < r_{n+1},\ n \geqslant 1, \\ \log|\zeta - z|, \text{ если } |\zeta| < r_0. \end{cases}$$

Это ядро подходящее для меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, например, при условии (см. оценки в [18, Ch. V, 10] [25, § 2]), что для любой постоянной $a > 1$

$$\sum_{n\geqslant 1} a^{p_n+1}\int_{r_n}^{r_{n+1}^-}(1-t^2)^{p_n+1}\,\mathrm{d}\nu^{\mathrm{rad}}(t) < +\infty.$$

Отметим, что для каждой меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ можно подобрать подходящее для ν субгармоническое ядро (ср. с теорией факторизации М. М. Джрбашяна [13], [14], [19]), которое, во всяком случае для не слишком быстро растущей $\nu^{\mathrm{rad}}(t)$ при $t \to 1^-$, в определенном смысле оптимально.

3. Пусть $\Omega = \mathbb{C}$. Следующие функции — субгармонические ядра:

(E_q) Для целого $q \geqslant 0$ субгармоническое *ядро Адамара–Вейерштрасса рода q* на $(\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{C}$ — функция

$$(\zeta, z) \longmapsto e_q(\zeta, z) := \log\Bigl|1-\frac{z}{\zeta}\Bigr| + \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k}\operatorname{Re}\frac{z^k}{\zeta^k}.$$

Такое ядро подходящее для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1\frac{\nu^{\mathrm{rad}}(t)}{t^{q+1}}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{\nu^{\mathrm{rad}}(t)}{t^{q+2}}\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

(W_∞) Для последовательности целых чисел $\{q_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, и возрастающей последовательности чисел $0 < r_0 \leqslant r_1 \leqslant \cdots < +\infty$ (конечной или бесконечной) субгармоническое *ядро Вейерштрасса* (относительно этих двух последовательностей) на $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ — функция

$$(\zeta, z) \longmapsto w_\infty(\zeta, z) := \begin{cases} e_{q_n}(\zeta, z), \text{ если } r_n \leqslant |\zeta| < r_{n+1},\ n \geqslant 1, \\ \log|\zeta - z|, \text{ если } |\zeta| < r_0. \end{cases}$$

Это ядро подходящее для меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$, удовлетворяющей условию (см. [3, Теорема 4.1])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{\nu^{\mathrm{rad}}(t)}{t^{q_n+2}} \,\mathrm{d}t < +\infty.$$

И здесь отметим, что для каждой меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ можно подобрать подходящее для ν субгармоническое ядро (см. теорию факторизации М. М. Джрбашяна [26] и обзор [27]) — в некотором смысле оптимальное.

4. Различные субгармонические ядра можно выписать и для конечносвязных областей, например, для кольца, путем сочетания приведенных выше ядер и использования инверсий, конформных отображений и пр.

§ 2.2. Формулировка Основной Теоремы и доказательства Теорем 1 и 2

Функция $F : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ *допускает гармоническую миноранту* (соотв. *субгармоническую миноранту*) на Ω, если найдется функция $h \in \mathrm{Har}(\Omega)$ (соотв. $h \in SH(\Omega)$, $h \not\equiv -\infty$ на Ω) такая, что $h(z) \leqslant F(z)$ для всех $z \in \Omega$.

Основная Теорема. *Пусть M — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_M на $\Omega \subset \mathbb{C}$, $0 \in \Omega$, и выполнены три условия* i)–iii) *Теоремы* 1, *а* $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ — *регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром K_0.*

Пусть u — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_u на Ω, $u(0) \neq -\infty$.

I. *Допустим, что найдется постоянная C, с которой выполнено какое-либо из следующих двух утверждений:*

(h1) *для каждой области $D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ выполнено неравенство*

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} g_D(\zeta, 0) \,\mathrm{d}\nu_u(\zeta) \leqslant \int_{B\setminus\{0\}} g_D(\zeta, 0) \,\mathrm{d}\nu_M(\zeta) + C; \tag{2.8}$$

(h2) *для каждой области $D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ выполнено неравенство*

$$\int_{\Omega} u(z) \,\mathrm{d}\omega_D(0, z) \leqslant \int_{\Omega} M(z) \,\mathrm{d}\omega_D(0, z) + C; \tag{2.9}$$

Тогда при любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничениям (1.5), *найдется* **гармоническая функция** *h на Ω такая, что*

$$u(z) + h(z) \leqslant M^{(\sigma)}(z) + Q^{(\sigma)}(z), \quad \forall z \in \Omega. \tag{2.10}$$

II. *Если разность $M - u$ допускает*[4] **субгармоническую миноранту** *на Ω, то для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей* (1.5), *функция*

$$M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} - u \tag{2.11}$$

допускает **гармоническую миноранту** *на Ω.*

[4]Если $M(z) = u(z) = -\infty$, то здесь удобно полагать $(M - u)(z) = +\infty$.

Для доказательства как Теоремы 1, так и Теоремы 2 потребуется

Лемма 2.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}$ — $(n+1)$*-связная область,* $n \geqslant 0$, $h \in \operatorname{Har}(\Omega)$. *Тогда при некотором* $b < n$ *найдется функция* $g \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ *без нулей в* Ω *такая, что*

$$\log|g(z)| \leqslant h(z) + b^+ \log^+|z|, \quad \forall z \in \Omega. \tag{2.12}$$

При этом если внутренность дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$ — *непустое множество, то в* (2.12) *можно взять* $b = 0$.

Доказательство. Пусть $K_1, \dots, K_n$ — все ограниченные компоненты связности дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$, и пусть $a_j \in K_j$ для $j = 1, \dots, n$. Тогда существуют [5, **9.12**] функция $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ и набор чисел $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ такие, что

$$h(z) = \operatorname{Re} f(z) + c_1 \log|z-a_1| + \dots + c_n \log|z-a_n|, \quad \forall z \in \Omega. \tag{2.13}$$

Если все числа $c_1, \dots, c_n$ *целые* или $n = 0$, то

$$h(z) = \log\Bigl|e^{f(z)} \prod_{j=1}^{n} (z-a_j)^{c_j}\Bigr| =: \log|g(z)|, \quad \forall z \in \Omega, \tag{2.14}$$

где *голоморфная в* Ω функция $g\colon z \longmapsto e^{f(z)} \prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{c_j}$ *не имеет нулей в* Ω, поскольку $a_j \notin \Omega$, а неравенство (2.12) очевидно ввиду равенства (2.14).

Допустим теперь, что хотя бы одно число c_j *не целое* и $n > 0$. Для $c \in \mathbb{R}$ через $[c]$ и $\{c\}$ здесь обозначаем соотв. *целую* и *дробную часть числа* c. В этих обозначениях представление (2.13) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} h(z) + \sum_{j=1}^{n} \bigl(1 - \{c_j\}\bigr) \log|z-a_j| &= \operatorname{Re} f(z) + \sum_{j=1}^{n} \bigl(1 + [c_j]\bigr) \log|z-a_j| \\ &= \log\Bigl|e^{f(z)} \prod_{j=1}^{n} (z-a_j)^{1+[c_j]}\Bigr| =: \log|g_1(z)|, \quad \forall z \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где *голоморфная в* Ω функция $g_1\colon z \longmapsto e^{f(z)} \prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{1+[c_j]}$ *не имеет нулей в* Ω, поскольку $a_j \notin \Omega$. При этом правая часть в (2.15) оценивается как

$$\log|g_1(z)| \leqslant h(z) + \Bigl(n - \sum_{j=1}^{n} \{c_j\}\Bigr) \log\bigl(|z| + \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|\bigr) =: h(z) + b \log\bigl(|z| + A\bigr), \ \forall z \in \Omega,$$

где $A := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ и $0 < b := n - \sum_{j=1}^{n}\{c_j\} < n$, поскольку хотя бы одна из дробных частей $\{c_j\}$ больше нуля. Отсюда следует оценка

$$\log|g_1(z)| \leqslant h(z) + b\log^+|z| + b\bigl(\log\bigl(|z|+A\bigr) - \log^+|z|\bigr) \leqslant h(z) + b^+\log^+|z| + C, \ \forall z \in \Omega,$$

если постоянная $C \in \mathbb{R}$ достаточно велика. Это дает требуемое неравенство (2.12) для функции $g := e^{-C} g_1 \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ с $\operatorname{Zero}_g = \varnothing$ на Ω.

Пусть теперь a — точка из *непустой внутренности дополнения* $\mathbb{C}\setminus\Omega$, которая включается в нее вместе с некоторым кругом $D(a,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Из доказанной возможности неравенства (2.12) получаем

$$\log\Bigl|\frac{g(z)}{(z-a)^{[b]^++1}}\Bigr|\leqslant h(z)+\bigl(b^+\log^+|z|-([b]^++1)\log|z-a|\bigr)\leqslant h(z)+C_\varepsilon\,,\quad \forall z\in\Omega,$$

если постоянная $C_\varepsilon\in\mathbb{R}$ достаточно велика. Это дает заключительное утверждение Леммы 2.1, если в роли g рассмотреть функцию $e^{-C_\varepsilon}g(z)/(z-a)^{[b]^++1}$. •

В следующих двух доказательствах $\sigma\in C(\Omega)$ — некоторая произвольная функция, удовлетворяющая ограничению (1.5).

Доказательство Теоремы 1. Всюду в доказательстве f_Λ — голоморфная функция с $\mathrm{Zero}_{f_\Lambda}=\Lambda=\{\lambda_k\}$, которая существует по теореме Вейерштрасса.

Функция $u:=\log|f_\Lambda|$ субгармоническая с мерой Рисса n_Λ, где n_Λ — считающая мера последовательности Λ, определенная в (1.1) [4, Теорема 3.7.8], т. е. $\nu_u=n_\Lambda$. При этом $u(0)\neq-\infty$, поскольку по условию $0\notin\Lambda$.

Докажем часть I Теоремы 1. Заметим, что при $u=\log|f_\Lambda|$ неравенства (1.10) и (1.11) — это в точности неравенства соотв. (2.8) и (2.9), а значит, высказывания (z1) и (z2) влекут за собой соотв. утверждения (h1) и (h2) из первой части Основной Теоремы. Следовательно, существует гармоническая на Ω функция h такая, что выполнено неравенство (2.10), т. е.

$$\log|f_\Lambda(z)|+h(z)\leqslant M^{(\sigma)}(z)+Q^{(\sigma)}(z),\quad\forall z\in\Omega. \tag{2.16}$$

Отсюда по Лемме 2.1 существует функция $g\in\mathrm{Hol}(\Omega)$ с $\mathrm{Zero}_g=\varnothing$ такая, что выполнено неравенство (2.12) с $b<n$ на Ω в общем случае и с $b=0$ в случае непустой внутренности дополнения $\mathbb{C}\setminus\Omega$. Таким образом[5], согласно (2.16)

$$\begin{aligned}\log|f_\Lambda(z)|+\log|g(z)|&\leqslant u(z)+h(z)+b^+\log^+|z|\\&\overset{(2.10)}{\leqslant} M^{(\sigma)}(z)+Q^{(\sigma)}(z)+b^+\log^+|z|,\quad\forall z\in\Omega.\end{aligned}$$

Последнее означает, что функция $f:=f_\Lambda g\in\mathrm{Hol}(\Omega)$ с последовательностью нулей $\mathrm{Zero}_f=\mathrm{Zero}_{f_\Lambda}\cup\mathrm{Zero}_g=\Lambda\cup\varnothing=\Lambda$ удовлетворяет на Ω неравенству $\log|f|\leqslant M^{(\sigma)}+Q^{(\sigma)}+b^+\log^+|\cdot|$, и при этом $f(0)=f_\Lambda(0)g(0)\neq0$. Это доказывает, что Λ — последовательность нулей для пространства $\mathrm{Hol}\bigl(\Omega;M^{(\sigma)}+Q^{(\sigma)}+b^+\log^+|\cdot|\bigr)$.

Перейдем к доказательству части II Теоремы 1. Если Λ — подпоследовательность нулей для $\mathrm{Hol}(\Omega;M)$, то существует функция $f\not\equiv0$ на Ω такая, что $f(\Lambda)=0$ и $f\in\mathrm{Hol}(\Omega;M)$. Очевидно, имеет место представление $f=f_\Lambda q$, где $q\not\equiv0$ — голоморфная функция на Ω. Из условия $f\in\mathrm{Hol}(\Omega;M)$ следует, что $\log|f_\Lambda(z)|+\log|q(z)|\leqslant M(z)+C$ для всех $z\in\Omega$, где C — постоянная. Последнее можно переписать в виде $\log|q(z)|-C\leqslant M(z)-\log|f_\Lambda(z)|$ для всех $z\in\Omega$. Это означает, что разность $M-\log|f_\Lambda|$ допускает *субгармоническую* миноранту

[5]Ссылка на номер формулы или утверждения над знаком (не)равенства означает, что при переходе к правой части этого выражения применялась и эта формула или утверждение.

$\log|q|-C$ на Ω. Следовательно, по утверждению II Основной Теореме (с $\log|f_\Lambda|$ в роли u) функция $M^{(\sigma)}+Q^{(\sigma)}-\log|f_\Lambda|$ допускает *гармоническую* миноранту на Ω. Иными словами, существует гармоническая на Ω функция h такая, что выполнено неравенство (2.16). Остается дословно повторить концовку доказательства части I Теоремы 1 после (2.16). •

Доказательство Теоремы 2. Пусть $f=g/q$ — мероморфная функция на Ω и $g,q\in\mathrm{Hol}(\Omega)$, а $\max\bigl\{|g(0)|,|q(0)|\bigr\}\neq 0$. Ясно, что существует представление

$$\begin{gathered} f=\frac{g_1}{q_1}=\frac{g_1 l}{q_1 l}\,,\quad g=g_1 l,\ q=q_1 l,\quad g_1,q_1,l\in\mathrm{Hol}(\Omega),\\ \mathrm{Zero}_{g_1}\cap\mathrm{Zero}_{q_1}=\varnothing,\quad l(0)\neq 0,\quad \max\bigl\{|g_1(0)|,|q_1(0)|\bigr\}\neq 0. \end{gathered} \tag{2.17}$$

При выполнении условия (r1) неравенство (1.12) перепишется в виде

$$\begin{gathered} \int_\Omega \log\max\bigl\{|g_1(z)|,|q_1(z)|\bigr\}\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)=\int_\Omega \log\max\bigl\{|g(z)|,|q(z)|\bigr\}\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)\\ -\int_\Omega \log|l(z)|\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)\leqslant\int_\Omega M(z)\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)+C-\int_\Omega \log|l(z)|\,\mathrm{d}\omega_D(0,z). \end{gathered} \tag{2.18}$$

Но по свойствам гармонической меры последний интеграл определяет значение в нуле гармонического продолжения сужения функции $\log|l|\,\bigr|_{\partial D}$ внутрь области D. Отсюда для $\log|l|\in SH(\Omega)$ получаем $\int_\Omega \log|l(z)|\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)\geqslant\log|l(0)|\neq-\infty$. Таким образом, для *субгармонической* на Ω функции

$$\begin{gathered} u:=\max\bigl\{\log|g_1|,\log|q_1|\bigr\}=\log\max\bigl\{|g_1|,|q_1|\bigr\},\\ u(0)=\log\max\bigl\{|g_1(0)|,|q_1(0)|\bigr\}\neq-\infty, \end{gathered} \tag{2.19}$$

и *постоянной* $C_1:=C-\log|l(0)|\in\mathbb{R}$*, не зависящей от областей* D, неравенство (2.18) записывается в виде

$$\int_\Omega u(z)\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)\leqslant\int_\Omega M(z)\,\mathrm{d}\omega_D(0,z)+C_1,\quad \forall D\in\mathfrak{U}_{K_0}(\Omega).$$

Это совпадает с неравенством (2.9) (с постоянной C_1 в роли C), а значит, утверждение (r1) Теоремы 2 влечет за собой выполнение утверждения (h2) Основной Теоремы. Следовательно, существует функция $h\in\mathrm{Har}(\Omega)$, с которой

$$\max\bigl\{\log|g_1(z)|,\log|q_1(z)|\bigr\}+h(z)\leqslant M^{(\sigma)}(z)+Q^{(\sigma)}(z),\quad \forall z\in\Omega. \tag{2.20}$$

При выполнении условия (r2) найдется постоянная C, с которой имеет место неравенство $\max\bigl\{\log|g|,\log|q|\bigr\}\leqslant M+C$ на Ω, что в обозначениях (2.17) и (2.19) означает выполнение неравенства $u+\log|l|\leqslant M+C$ на Ω. Другими словами, функция $M-u$ допускает *субгармоническую* миноранту $\log|l|-C$. Тогда по утверждению II Основной Теоремы функция $M^{(\sigma)}+Q^{(\sigma)}-u$ из (2.11) допускает некоторую *гармоническую* миноранту h на Ω. В обозначении (2.19) это означает в точности выполнение неравенства (2.20). Таким образом, неравенство (2.20) с некоторой функцией $h\in\mathrm{Har}(\Omega)$ имеет место как при условии (r1), так и при условии (r2). По Лемме 2.1 существует функция $s \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ с $\mathrm{Zero}_s = \varnothing$ такая, что выполнено неравенство вида (2.12) с функцией s вместо g для некоторого $b < n$ на Ω в общем случае и для $b = 0$ в случае непустой внутренности дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Тогда неравенство (2.20) влечет за собой неравенство $\max\bigl\{\log|g_1 s|, \log|q_1 s|\bigr\} \leqslant M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} + b^+ \log^+ |\cdot|$ на Ω.

Отсюда, если положить $g_0 = g_1 s$ и $q_0 = q_1 s$, то ввиду (2.17) имеем представление $f = g_1/q_1 = g_0/q_0$, где $g_0, q_0 \in \mathrm{Hol}\bigl(\Omega; M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} + b^+ \log|\cdot|\bigr)$ и $\mathrm{Zero}_{g_0} \cap \mathrm{Zero}_{q_0} = \varnothing$, что и требовалось. •

3 Выметание как фундамент общей схемы

§ 3.1. Меры и функции Аренса–Зингера и Йенсена

Пусть меры $\delta, \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ имеют компактный носитель в $\mathbb{C}$, а H — некоторый выпуклый конус полунепрерывных сверху функций с единой областью определения, включающей в себя объединение $\operatorname{supp}\delta \cup \operatorname{supp}\mu$. Пишем $\delta \prec_H \mu$ и говорим, что мера μ — *выметание меры δ относительно H*, если

$$\int h \, \mathrm{d}\delta \leqslant \int h \, \mathrm{d}\mu, \quad \forall h \in H. \tag{3.1}$$

Очевидно, отношение $\prec_H$ — предпорядок, т. е. оно рефлексивно и транзитивно, а если $H = -H$, то неравенство в (3.1) можно заменить на равенство.

Через δ_z обозначаем меру Дирака в точке $z \in \mathbb{C}$, т. е. $\operatorname{supp}\delta_z = \{z\}$, $\delta_z(\mathbb{C}) = 1$.

Определение 3 ([28]–[34], [1], [6]–[8]). Мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ с компактным носителем в области Ω называется *мерой Йенсена* (соотв. *мерой Аренса–Зингера*, или *представляющей мерой*) для точки $z \in \Omega$ на Ω, если $\delta_z \prec_H \mu$, где $H = SH(\Omega)$ (соотв. $H = \mathrm{Har}(\Omega)$), т. е. выполнены соотношения

$$h(z) \leqslant \int_\Omega h \, \mathrm{d}\mu, \ \forall h \in SH(\Omega) \quad \Bigl(\text{соотв. } h(z) = \int_\Omega h \, \mathrm{d}\mu, \ \forall h \in \mathrm{Har}(\Omega) \Bigr). \tag{3.2}$$

Через $\mathcal{J}_z(\Omega)$ (соотв. $\mathcal{AS}_z(\Omega)$) обозначаем класс всех мер Йенсена (соотв. Аренса–Зингера) для $z \in \Omega$. Если $z = 0 \in \Omega$, то $\mathcal{J}(\Omega) := \mathcal{J}_0(\Omega)$, $\mathcal{AS}(\Omega) := \mathcal{AS}_0(\Omega)$.

Очевидно, $\mathcal{J}_z(\Omega) \subset \mathcal{AS}_z(\Omega)$ и каждая мера $\mu \in \mathcal{AS}_z(\Omega)$ вероятностная, т. е.

$$\mu(\Omega) = 1, \qquad \forall \mu \in \mathcal{AS}_z(\Omega). \tag{3.3}$$

При $D(z,r) \Subset \Omega$ простейшие примеры мер Йенсена для $z \in \Omega$ — это мера Дирака δ_z, мера $m_z^{(r)}$, полученная сдвигом на радиус-вектор точки z [35, гл. IV, § 6] меры $m^{(r)}$ из (1.3), а также такой же сдвиг $s_z^{(r)}$ *меры длины дуги $s^{(r)}$ на окружности $\partial D(r)$ с нормировкой $s^{(r)}\bigl(\partial D(r)\bigr) = 1$.*

Подклассами $\mathcal{J}_z(\Omega)$ служат класс $\mathcal{H}_z(\Omega)$ (соотв. $\mathcal{H}_z^{\mathrm{reg}}(\Omega)$) всех гармонических мер $\omega_D(z,\cdot)$ относительно областей $D\Subset\Omega$ (соотв. регулярных областей $D\Subset\Omega$) в точке $z\in D$. Полагаем $\mathcal{H}(\Omega):=\mathcal{H}_0(\Omega)$, $\mathcal{H}^{\mathrm{reg}}(\Omega):=\mathcal{H}_0^{\mathrm{reg}}(\Omega)$.

Потенциал меры $\mu\in\mathcal{AS}(\Omega)$ определяем как функцию

$$\zeta\mapsto V_\mu(\zeta):=\int\log|z-\zeta|\,\mathrm{d}\mu(z)-\log|\zeta|\overset{(3.3)}{=}\int\log\Bigl|1-\frac{z}{\zeta}\Bigr|\,\mathrm{d}\mu(z),\ \zeta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\,. \tag{3.4}$$

Для любой функции $u_\nu\in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_u при условии $u_\nu(0)\neq-\infty$ (это, в частности, означает, что $\nu_u\bigl(\{0\}\bigr)=0$ [36, Теорема 2]) имеет место *обобщенная формула Пуассона–Йенсена* [34, Предложение 1.2]:

$$u_\nu(0)=\int_\Omega u_\nu\,\mathrm{d}\mu-\int_{\Omega\setminus\{0\}}V_\mu\,\mathrm{d}\nu_u\,. \tag{3.5}$$

В частности, в случае гармонической меры $\omega_D(0,\cdot)\in\mathcal{H}(\Omega)\subset\mathcal{J}(\Omega)$ в точке $0\in D$ относительно области $D\Subset\mathbb{C}$ ее потенциал (3.4) — это продолженная функция Грина $g_D(\cdot,0)$ области D с полюсом в точке 0, а формула (3.5) переходит в обычную формулу Пуассона–Йенсена [3, 5.7.4]

$$u_\nu(0)=\int_\Omega u_\nu(\zeta)\,\mathrm{d}\omega_D(0,\zeta)-\int_{\Omega\setminus\{0\}}g_D(\zeta,0)\,\mathrm{d}\nu_u(\zeta)\,. \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Пусть V_μ — потенциал* (3.4) *меры $\mu\in\mathcal{AS}(\Omega)$, и k — субгармоническое ядро на $B\times\Omega$. Тогда V_μ можно представить в виде*

$$V_\mu(\zeta)=\int_\Omega k(\zeta,z)\,\mathrm{d}\mu(z)-k(\zeta,0)=\int_\Omega\bigl(k(\zeta,z)-k(\zeta,0)\bigr)\,\mathrm{d}\mu(z),\ \forall\zeta\in B\setminus\{0\}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Согласно (1.7) имеем представления

$$k(\zeta,z)=\log|\zeta-z|+h(\zeta,z),\quad k(\zeta,0)=\log|\zeta|+h(\zeta,0),\quad\forall\zeta\in B\setminus\{0\}. \tag{3.8}$$

где $h(\zeta,z)$ гармоническая компонента ядра k, т. е. гармоническая по $z\in\Omega$ функция при фиксированных $\zeta\in B$. Отсюда для $\mu\in\mathcal{AS}(\Omega)$ по Определению 3

$$\begin{aligned}\int_\Omega\bigl(k(\zeta,z)-k(\zeta,0)\bigr)\,\mathrm{d}\mu(z)&\overset{(3.8)}{=}\int_\Omega\bigl(\log|\zeta-z|+h(\zeta,z)-\log|\zeta|-h(\zeta,0)\bigr)\,\mathrm{d}\mu(z)\\&\overset{(3.3)}{=}\int\bigl(\log|\zeta-z|-\log|\zeta|\bigr)\,\mathrm{d}\mu(z)+\int h(\zeta,z)\,\mathrm{d}\mu(z)-h(\zeta,0)\\&\overset{(3.4),(3.2)}{=}V_\mu(\zeta)+h(\zeta,0)-h(\zeta,0)=V_\mu(\zeta)\end{aligned}$$

для каждой точки $\zeta\in B\setminus\{0\}$, что и требовалось. •

Определение 4 ([1], [6]–[8], [33], [34]**).** Функция $V\in SH\bigl(\mathbb{C}\setminus\{0\}\bigr)$ называем *функцией Аренса–Зингера* (или *представляющей функцией*) на Ω, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

(1) $V \equiv 0$ на $\mathbb{C} \setminus \bigl(K \bigcup \{0\}\bigr)$ для некоторого $K \Subset \Omega$ (*финитность* V);

(2) $\limsup\limits_{\zeta \to 0} \dfrac{V(\zeta)}{-\log|\zeta|} \leqslant 1$ (*нормировка в нуле для* V).

Если же функция Аренса–Зингера V на Ω удовлетворяет еще и условию

(3) $V(\zeta) \geqslant 0$ для всех $\zeta \in \Omega \setminus \{0\}$ (*положительность* V),

то ее называем *функцией Йенсена* на Ω. Через $\mathcal{P}_{AS}(\Omega)$ и $\mathcal{P}_J(\Omega)$ обозначаем класс всех функций соотв. Аренса–Зингера и Йенсена.

Очевидно, $\mathcal{P}_J(\Omega) \subset \mathcal{P}_{AS}(\Omega)$. *Класс* $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(\Omega)$ (соотв. $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^{\mathrm{reg}}(\Omega)$) всех *продолженных функций Грина* $g_D(\cdot, 0)$ для областей $D \Subset \Omega$ (соотв. для регулярных областей $D \Subset \Omega$) — подкласс в $\mathcal{P}_J(\Omega)$.

Предложение 3.2 ([34, Теорема двойственности]). *Отображение* $\mathcal{P}\colon \mu \to V_\mu$ *— аффинная*[6] *биекция* $\mathcal{AS}(\Omega)$ *на* $\mathcal{P}_{AS}(\Omega)$ *и* $\mathcal{J}(\Omega)$ *на* $\mathcal{P}_J(\Omega)$.

Отметим, что согласно Предложению 3.2 для $V \in \mathcal{P}_{AS}(\Omega)$ условие (2) нормировки в нуле эквивалентно условию (см. [4, Теорема 3.1.2])

(2′) $V(\zeta) \leqslant -\log|\zeta| + O(1)$ при $\zeta \to 0$.

Пусть $B \Subset \Omega$. Обозначим через $\mathcal{AS}^B(\Omega)$ и $\mathcal{J}^B(\Omega)$ класс всех мер соотв. Аренса–Зингера и Йенсена μ на Ω таких, что $B \bigcap \operatorname{supp} \mu = \varnothing$.

Пусть $\Omega_0 \Subset \Omega$ — область, содержащая нуль. Через $\mathcal{P}_{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$ обозначаем множество всех функций соотв. Аренса–Зингера и Йенсена V, гармонических на $\Omega_0 \setminus \{0\}$ и таких (ср. с условием (2′)), что

$$V(\zeta) = -\log|\zeta| + O(1), \quad \zeta \to 0. \tag{3.9}$$

Предложение 3.3. *Пусть* $\Omega_0 \Subset \Omega$ *— область и* $0 \in \Omega_0$. *Отображение* $\mathcal{P}$ *из Предложения* 3.2 *— аффинная биекция* $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ *на* $\mathcal{P}_{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ *и* $\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ *на* $\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$.

Доказательство. Инъективность и свойство аффинности сужений отображения $\mathcal{P}$ на $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ следует из Предложения 3.2.

Пусть $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega) \supset \mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$. Гармоничность потенциала V_μ на $\Omega_0 \setminus \{0\}$ следует из условия $\Omega_0 \bigcap \operatorname{supp} \mu = \varnothing$ и определения (3.4) потенциала, поскольку логарифмический потенциал $p_\mu(\zeta) := \int \log|z - \zeta| \, \mathrm{d}\mu(z)$ — гармоническая функция вне $\operatorname{supp} \mu$. Для доказательства соотношения (3.9) воспользуемся инверсией $z \longmapsto 1/\overline{z} = z^\star$ относительно единичной окружности $\partial\mathbb{D}$. Пусть $\mu^\star$ — образ меры μ при инверсии. Тогда согласно (3.3) $\mu^\star$ — вероятностная мера, по условию $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ имеет компактный носитель и $\{0\} \bigcap \operatorname{supp} \mu^\star = \varnothing$, а

$$V_\mu(\zeta) = \int \log\Bigl|1 - \frac{\zeta^\star}{z^\star}\Bigr| \, \mathrm{d}\mu^\star(z^\star) = p_{\mu^\star}(\zeta^\star) - \int \log|z^\star| \, \mathrm{d}\mu^\star(z^\star). \tag{3.10}$$

[6] Это значит, что $\mathcal{P}\bigl(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2\bigr) = \alpha\mathcal{P}(\mu_1) + (1-\alpha)\mathcal{P}(\mu_2)$ для $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Для логарифмического потенциала $p_{\mu^\star}$ имеем $p_{\mu^\star}(\zeta^\star)=\mu^\star(\mathbb{C})\log|\zeta^\star|+O\bigl(|\zeta^\star|^{-1}\bigr)$ при $\zeta^\star\to\infty$ [4, Теорема 3.1.2], откуда ввиду (3.10) получаем

$$V_\mu(\zeta)=1\cdot\log|\zeta^\star|-O(1)+O\bigl(|\zeta^\star|^{-1}\bigr)=-\log|\zeta|+O(1),\quad \zeta\to 0,$$

что дает (3.9) для $V=V_\mu$. Таким образом, доказано, что $\mathcal{P}$ действует из $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ в $\mathcal{P}_{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и, учитывая Предложение 3.2, из $\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ в $\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$.

Осталось доказать сюръективность отображений $\mathcal{P}\colon\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)\to\mathcal{P}_{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $\mathcal{P}\colon\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)\to\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$. Обратное отображение $\mathcal{P}^{-1}$ действует на функции Аренса–Зингера и Йенсена V по правилу [34, Предложение 1.4, (4)]

$$\mathcal{P}^{-1}(V)=\frac{1}{2\pi}\cdot\Delta V\,\Bigl|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}+\Bigl(1-\limsup_{\zeta\to 0}\frac{V(\zeta)}{-\log|\zeta|}\Bigr)\cdot\delta_0\,.$$

При условии (3.9) второе слагаемое справа здесь можно убрать, а из гармоничности $V\in\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $V\in\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ на $\Omega\setminus\{0\}$ следует, что, с учетом Предложения 3.2, $\mathcal{P}^{-1}$ действует соотв. из $\mathcal{P}_{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ в $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и из $\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ в $\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$. •

Напомним некоторые понятия и факты, связанные с классическим выметанием [37]. Для ограниченной регулярной области $\Omega_1\Subset\Omega$ и меры $\mu\in\mathcal{M}^+(\Omega)$ *классическое выметание* меры μ *относительно* Ω_1 — это мера $\mu^{\Omega_1}\in\mathcal{M}^+(\Omega)$, определенная на борелевских подмножествах $E\subset\Omega$ по правилу

$$\mu^{\Omega_1}(E):=\mu(E\setminus\Omega_1)+\int_{\Omega_1}\omega_{\Omega_1}(z,E)\,\mathrm{d}\mu(z).\tag{3.11}$$

В частности, $\Omega_1\bigcap\operatorname{supp}\mu^{\Omega_1}=\varnothing$, и $\mu\prec_{SH(\Omega)}\mu^{\Omega_1}$ [30, Лемма 6.4]. Отсюда для регулярных подобластей $\Omega_0\Subset\Omega$, содержащих 0, имеем

$$\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)=\{\mu^{\Omega_0}\colon\mu\in\mathcal{AS}(\Omega)\},\quad \mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)=\{\mu^{\Omega_0}\colon\mu\in\mathcal{J}(\Omega)\}.\tag{3.12}$$

Кроме того, в обозначении $\operatorname{Har}(\overline{\Omega}_1)$ для пространства непрерывных на $\overline{\Omega}_1$ и одновременно гармонических в Ω_1 функций при условии $\operatorname{supp}\mu\subset\Omega_1$ выполнены соотношения $\mu\prec_{\operatorname{Har}(\overline{\Omega}_1)}\mu^{\Omega_1}$ и $\operatorname{supp}\mu^{\Omega_1}\subset\partial\Omega_1$.

Пусть $D\Subset\mathbb{C}$ — регулярная область и $0\in D$. Для краткости ω_D — гармоническая мера относительно D в нуле. Как и выше, δ_0 — мера Дирака в нуле.

Предложение 3.4. *Пусть $D,\Omega',D\cup\Omega'\Subset\Omega$ — регулярные области, содержащие нуль. Тогда в введенных обозначениях справедливы равенства*

$$\delta_0^{D\cup\Omega'}=\omega_{D\cup\Omega'}=(\omega_D)^{D\cup\Omega'}=\omega_D-\bigl(\omega_D\,\bigl|_{\Omega'}\bigr)+\bigl(\omega_D\,\bigl|_{\Omega'}\bigr)^{D\cup\Omega'}.\tag{3.13}$$

Доказательство. Первое равенство из (3.13) см., например, в [37, гл. IV, § 1, п. 6, Замечание]. Из цепочки выметаний $\delta_0\prec_{\operatorname{Har}(\overline{D})}\delta_0^D=\omega_D\prec_{\operatorname{Har}(\overline{D\cup\Omega'})}(\omega_D)^{D\cup\Omega'}$ следует, что $\delta_0\prec_{\operatorname{Har}(\overline{D\cup\Omega'})}(\omega_D)^{D\cup\Omega'}$ и в то же время $\delta_0\prec_{\operatorname{Har}(\overline{D\cup\Omega'})}\delta_0^{D\cup\Omega'}=\omega_{D\cup\Omega'}$. Но выметание относительно конуса $\operatorname{Har}(\overline{D\cup\Omega'})$ меры δ_0, т. е. выметание на компакт $\partial(D\cup\Omega')$, единственно [37, гл. IV, § 4, п. 14], что дает второе равенство в (3.13). По тем же причинам из цепочки соотношений

$$\delta_0\prec_{\operatorname{Har}(\overline{D})}\omega_D=\omega_D-\bigl(\omega_D\,\bigl|_{\Omega'}\bigr)+\bigl(\omega_D\,\bigl|_{\Omega'}\bigr)\prec_{\operatorname{Har}(\overline{D\cup\Omega'})}\omega_D-\bigl(\omega_D\,\bigl|_{\Omega'}\bigr)+\bigl(\omega_D\,\bigl|_{\Omega'}\bigr)^{D\cup\Omega'}$$

следует последнее равенство в (3.13), поскольку носитель меры в правой части — это $\partial(D\cup\Omega')$, т. е. справа вновь выметание на компакт $\partial(D\cup\Omega')$. •

§ 3.2. О существовании (суб)гармонических минорант

Предложение 3.5 (ср. с [8, Предложение 7.1]). *Пусть $F\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ — борелевская функция. Если F допускает гармоническую миноранту, то*

$$-\infty < \inf \left\{ \int_\Omega F \,\mathrm{d}\mu \colon \mu \in \mathcal{AS}(\Omega) \right\}. \tag{3.14}$$

Если F допускает субгармоническую миноранту и ограничена снизу в некоторой окрестности нуля, то

$$-\infty < \inf \left\{ \int_\Omega F \,\mathrm{d}\mu \colon \mu \in \mathcal{J}(\Omega) \right\}. \tag{3.15}$$

Очевидно, $\mathcal{AS}(\Omega)$ в (3.14) можно заменить на $\mathcal{J}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ или $\mathcal{H}^{\mathrm{reg}}(\Omega)$ и подставить $\mathcal{H}(\Omega)$ или $\mathcal{H}^{\mathrm{reg}}(\Omega)$ вместо $\mathcal{J}(\Omega)$ в (3.15).

Доказательство. Пусть h — борелевская функция на Ω и $F \geqslant h$ на Ω. Тогда $\int F d\mu \geqslant \int h \,\mathrm{d}\mu$ для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$.

Если миноранта h гармоническая на Ω, то согласно (3.2) получаем $\int h \,\mathrm{d}\mu = h(0)$ для всех $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$, что доказывает (3.14).

Допустим теперь, что функция F ограничена снизу в некотором круге $D(2\varepsilon) \Subset \Omega$, а миноранта h субгармоническая на Ω. Можно построить функцию $h_\varepsilon \in SH(\Omega)$, которая совпадает с h на $\Omega \setminus D(\varepsilon)$ и гармоническая на $D(\varepsilon)$ [3, Теорема 2.18]. Отсюда разность $h_\varepsilon - C$ — субгармоническая миноранта для F, если постоянная C достаточно велика, и $\int F \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int (h_\varepsilon - C) \,\mathrm{d}\mu \geqslant h_\varepsilon(0) - C$ для всех $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$ по Определению 3, что доказывает (3.15). •

Дадим также другую трактовку Предложения 3.5 для случая специальной функции F, представленной в виде разности

$$F = M - u, \quad M\colon \Omega \to [-\infty, +\infty], \quad u \in SH(\Omega), \quad u(0) \neq -\infty. \tag{3.16}$$

Здесь функции M и u могут принимать значение $-\infty$ в некоторых точках $z \in \Omega$ одновременно. В таком случае удобно полагать $F(z) = +\infty$.

Предложение 3.6. *Пусть $M\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ — борелевская функция, а u — функция из (3.16) с мерой Рисса ν_u. Если функция F из (3.16) допускает гармоническую миноранту на Ω, то найдется постоянная C такая, что*

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega M \,\mathrm{d}\mu + C \quad \text{и} \quad \int_{\Omega\setminus\{0\}} V_\mu \,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_\Omega M \,\mathrm{d}\mu + C \tag{3.17}$$

для всех $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$, где V_μ — потенциал (3.4). Кроме того, если $M \in SH(\Omega)$ с мерой Рисса ν_M и $M(0) \neq -\infty$, то существует постоянная C такая, что

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} V \,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_{\Omega\setminus\{0\}} V \,\mathrm{d}\nu_M + C \tag{3.18}$$

для всех функций Аренса–Зингера V на Ω.

If $F = M - u$ из (3.16) допускает субгармоническую миноранту, и M ограничена снизу в некоторой окрестности нуля, то существует постоянная C, с которой (3.17) выполнено для всех $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$. Кроме того, если $M \in SH(\Omega)$, то найдется постоянная C, с которой (3.18) выполнено для всех $V \in \mathcal{P}_J(\Omega)$.

Доказательство. В связи с тем, что полярное множество точек, где u принимает значение $-\infty$, является множеством типа G_δ, функция F из (3.16) борелевская при борелевской функции M и соглашении, следующим за (3.16).

Первое неравенство в (3.17) (для всех $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$) — это переписанное в иной форме (3.14) из Предложения 3.5. Из него по обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.5), примененной к u с $u(0) \neq -\infty$, следует второе неравенство в (3.17) с постоянной $C - u(0)$ в роли C. Далее по той же формуле для $M \in SH(\Omega)$ и по Предложению 3.2 получаем (3.18) с постоянной $C + M(0)$ в роли C. Аналогично из (3.15) выводится часть, касающаяся субгармонической миноранты. •

Пусть $\{u_n\}$ — последовательность функций, субгармонических на Ω, локально ограничена сверху в Ω. Через $\limsup^* u_n$ обозначаем полунепрерывную сверху регуляризацию поточечного верхнего предела последовательности $\{u_n\}$, которая также субгармоническая функцией на Ω.

В определенной смысле близка к обратной Предложению 3.5

Теорема B ([8, Теорема 7.1])**.** *Пусть $H \subset SH(\Omega)$ — выпуклый конус, содержащий отрицательную ($\leqslant 0$) на Ω функцию, и $F\colon \Omega \to [-\infty, +\infty]$ из $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Допустим, что для любого $K \Subset \Omega$ и любого $C \in \mathbb{R}$ существует функция $v \in H$ такая, что $v \leqslant C$ на K, и выполнено одно из следующих двух условий:

- (L*) *для любой локально ограниченной сверху последовательности функций $\{v_n\} \subset H$ выполнено $\limsup^* v_n \in H$;*
- (CL) *конус H секвенциально замкнут в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Если при этом

$$-\infty < \inf\left\{ \int_\Omega F \, \mathrm{d}\mu \colon \delta_0 \prec_H \mu, \ \mu \in \mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega) \right\}, \tag{3.19}$$

где δ_0 — мера Дирака в нуле, то для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей условию (1.5), найдется функция $h \in H$ такая, что[7] *$h \not\equiv -\infty$ на Ω и*

$$h(z) \leqslant F^{(\sigma)}(z) \overset{(1.6)}{:=} \int_{D(\sigma(z))} F(z+w) \, \mathrm{d}m^{(\sigma(z))}(w), \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.20}$$

Пространство $H = \mathrm{Har}(\Omega)$ и конус $H = SH(\Omega)$ удовлетворяют условиям Теоремы B (см., к примеру, [7]–[8]). Результаты более общие, чем Теорема B, были установлены для абстрактных конусов H в проективных пределах векторных решеток [7, Теоремы 5.1, 6.1] и для $H = SH(\Omega)$ в [32, Следствие 1.7] (см. также библиографию в этих статьях). Они здесь не используются.

[7] В [7] по определению $SH(\Omega)$ не содержит функцию, тождественно равную $-\infty$.

Далее потребуются трактовки Теоремы B для случаев $H = \mathrm{Har}(\Omega)$ или $H = SH(\Omega)$ и для функции F вида (3.16), где $M \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ или $M \in SH(\Omega)$.

Теорема 3. *Пусть $u \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_u и $u(0) \neq -\infty$, а функция $M \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ограничена в открытой окрестности замыкания $\overline{\Omega}_0$ некоторой подобласти $\Omega_0 \Subset \Omega$, содержащей нуль.*

Если существует постоянная C, с которой выполняется неравенство

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega M \,\mathrm{d}\mu + C \quad \text{или} \quad \int_{\Omega\setminus\{0\}} V_\mu \,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_\Omega M \,\mathrm{d}\mu + C \tag{3.21}$$

для каждой меры $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ (соотв. $\mu \in \mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$), где V_μ — потенциал (3.4), то для каждой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей условию (1.5), найдется гармоническая функция h (соотв. субгармоническая функция $h \not\equiv -\infty$) на Ω такая, что

$$u(z) + h(z) \overset{(1.6)}{\leqslant} M^{(\sigma)}(z), \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.22}$$

В дополнение, если $M \in SH(\Omega)$, то неравенства (3.21) можно заменить на

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} V \,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_{\Omega\setminus\{0\}} V \,\mathrm{d}\nu_M + C \tag{3.23}$$

для каждой функции $V \in \mathcal{P}^{\Omega_0}_{AS}(\Omega) \bigcap C(\Omega)$ (соотв. функции $V \in \mathcal{P}^{\Omega_0}_{J}(\Omega) \bigcap C(\Omega)$).

Доказательство. Всегда можно построить область Ω_1 такую, что она уже регулярна, $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$, а функция M по-прежнему ограничена в открытой окрестности замыкания $\overline{\Omega}_1$. Затем можно выбрать достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и постоянную $c \geqslant 0$ так, что

$$|M(z+w)| \leqslant c, \quad \forall z \in \Omega_1, \quad \forall w \in D(\varepsilon), \tag{3.24M}$$

$$\bigcup_{z\in\Omega_1} D(z,\varepsilon) \Subset \Omega, \quad \Omega_0 \bigcap \left(\bigcup_{z\in\partial\Omega_1} D(z,\varepsilon) \right) = \varnothing. \tag{3.24Ω}$$

Положим $F = M - u$, а $H = SH(\Omega)$ или $H = \mathrm{Har}(\Omega)$. По обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.5) и Предложению 3.3 из (3.21) следует, что неравенство

$$\int F \,\mathrm{d}\mu > -C \tag{3.25}$$

выполнено для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ такой, что $\delta_0 \prec_H \mu$ и $\Omega_0 \bigcap \operatorname{supp} \mu = \varnothing$.

Пусть μ — произвольная мера из $\mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ и $\delta_0 \prec_H \mu$. Обозначим через μ_1 сужение μ на Ω_1. Имеет место представление

$$\mu = \mu_1 + \mu_\infty, \quad \mu_1, \mu_\infty \in \mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega). \tag{3.26}$$

Мера $\mu' := \mu_1^{\Omega_1} * m^{(\varepsilon)} \in \mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ — выметание μ_1 относительно $SH(\Omega)$ (см. (3.12) и [8, Лемма 7.1]). Отсюда $\delta_0 \prec_H (\mu' + \mu_\infty) \in \mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega)$,

$$\int u\,\mathrm{d}\mu_1 \leqslant \int u\,\mathrm{d}\mu', \tag{3.27}$$

а по построению (3.11) и (3.24Ω) имеем $\Omega_0 \bigcap \operatorname{supp}(\mu' + \mu_\infty) = \varnothing$. Неравенство (3.25) выполнено для всех таких мер. Таким образом,

$$\int F\,\mathrm{d}(\mu' + \mu_\infty) \geqslant -C. \tag{3.28}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\int F\,\mathrm{d}\mu &\overset{(3.26)}{=} \int F\,\mathrm{d}(\mu' + \mu_\infty) + \int F\,\mathrm{d}\mu_1 - \int (M-u)\,\mathrm{d}\mu' \\ &\overset{(3.28)}{\geqslant} -C - \left(\int u\,\mathrm{d}\mu_1 - \int u\,\mathrm{d}\mu'\right) + \int_{\overline{\Omega}_1} M\,\mathrm{d}\mu_1 - \int_{\overline{\Omega}_1} M\,\mathrm{d}\mu' \\ &\overset{(3.27)}{\geqslant} -C - \int_{\overline{\Omega}_1} |M|\,\mathrm{d}(\mu_1 + \mu') \overset{(3.24\mathrm{M}),(3.3)}{\geqslant} -C - 2c.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует условие (3.19) Теоремы B. Отсюда найдется функция $h \in H$, для которой выполнено (3.20). В обозначении (3.16) это дает $u^{(\sigma)} + h \leqslant M^{(\sigma)}$. В силу субгармоничности u имеем $u \leqslant u^{(\sigma)}$ и приходим к (3.22).

Для случая (3.23) по Предложению 3.3 видим, что отображение $\mathcal{P}$ действует из $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ в $\mathcal{P}^{\Omega_0}_{AS}(\Omega) \bigcap C(\Omega)$ и из $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ в $\mathcal{P}^{\Omega_0}_{AS}(\Omega) \bigcap C(\Omega)$, а (3.21) следует из (3.23) по обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.5). •

Замечание. В Теореме 3 можем считать, что (3.21) выполнено лишь для всех $\mu \in \mathcal{AS}^{\overline{\Omega}_0}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ (соотв. $\mu \in \mathcal{J}^{\overline{\Omega}_0}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}_{\mathrm{ac}}(\Omega)$), поскольку всегда можно несколько увеличить область Ω_0 с сохранением всех условий этой теоремы.

4 От функций Грина и гармонических мер к мерам Йенсена

Цель этого раздела — показать, что каждое из двух условий (h1)и (h2) Основной Теоремы и посылка ее части II приводят к одному и тому же условию

(J) *Существует постоянная C и область $\Omega' \Subset \Omega$, содержащая связный компакт $K_0 \ni 0$ из условия* i), *с которыми неравенство*

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} V_\mu\,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_\Omega M\,\mathrm{d}\mu + C \tag{4.1}$$

выполнено для всех мер Йенсена $\mu \in \mathcal{J}^{\Omega'}(\Omega)$, а функция M ограничена в открытой окрестности замыкания $\overline{\Omega'}$.

Для части II это совсем просто. Если функция $M - u$ в условиях Основной Теоремы допускает субгармоническую миноранту, то по Предложению 3.6 (см. второе неравенство в (3.17)) сразу получаем условие (J).

В §§ 4.1, 4.2 то же самое устанавливается при условиях (h1) и (h2).

§ 4.1. Аппроксимация мер Йенсена гармоническими мерами

Сначала напомним важный результат Б. Коула и Т. Рансфорда [30], некоторая техническая вариация которого будет представлена в Теореме 4.

Пусть S — открытое или компактное подмножество области $\Omega \subset \mathbb{C}$, а $C(S)$ пространство Фреше, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах из S. Топологически сопряженное пространство $C(S)^*$ можно отождествить с пространством вещественных борелевских мер с компактным носителем на Ω. Далее используется только $*$-слабая топология в $C(S)^*$. Через $\operatorname{conv} A$ и $\overline{\operatorname{conv}} A$ обозначаем выпуклую оболочку множества $A \subset C(S)^*$ и ее замыкание.
Теорема C (Коула–Рансфорда, [30, Теорема 6.6]**).** $\mathcal{J}(\Omega) = \overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}(\Omega)$.

Предложение 4.1 ([30, Предложение 2.1], [34, Предложение 1.1]**).** *Пусть* Ω_1 *— подобласть области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и* $0 \in \Omega_1$. *Тогда* $\mathcal{J}(\Omega_1) \subset \mathcal{J}(\Omega)$.

Обратно, если $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega_1$ *и каждая ограниченная компонента связности дополнения* $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$ *пересекается с дополнением* $\mathbb{C} \setminus \Omega$, *то* $\mu \in \mathcal{J}(\Omega_1)$.

Предложение 4.2. *Пусть* D *— подобласть в* Ω *и* $0 \in D \Subset \Omega$, *а возрастающая относительно включения последовательность областей* $D_n \ni 0$, $n \in \mathbb{N}$, *при объединении дает область* D, *т. е.* $D_n \subset D_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. *Тогда последовательность гармонических мер* $\omega_{D_n}(0,\cdot)$ *сходится к* $\omega_D(0,\cdot)$ *в* $C(\Omega)^*$.

Доказательство. Достаточно почти дословно повторить доказательство [37, Теорема 5.14] с использованием [37, Теорема 4.15]. •

Всюду в этом подразделе K' — некоторый *связный компакт в области* Ω, *содержащий* 0, а $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{K'}(\Omega)$ — фиксированная *регулярная оптимально исчерпывающая система в* Ω с центром K' (см. Определение 1). При этом для произвольных областей $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \subset \Omega$ используем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\Omega_2;\Omega_1) &:= \{D \in \mathcal{U} \colon \Omega_1 \subset D \Subset \Omega_2\}, \quad \mathcal{U}(\Omega_2) := \mathcal{U}(\Omega_2;\varnothing), \\ \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_2;\Omega_1) &:= \{\omega_D(0,\cdot) \colon D \in \mathcal{U}(\Omega_2;\Omega_1)\}, \quad \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_2) := \mathcal{H}(\Omega_2;\varnothing), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где в последней строке предполагается, что $0 \in \Omega_1$.

Предложение 4.3. *Для любой области* $\Omega_+ \subset \Omega$, *содержащей* 0, *справедливо равенство* $\overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}(\Omega_+) = \overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+)$, *где замыкания — в топологии* $C(\Omega_+)^*$.

Доказательство. Пусть $D \Subset \Omega_+$ — область, $0 \in D$. Из части условия 1) Определения 1 для регулярной оптимально исчерпывающей системы $\mathcal{U}$ в Ω сразу следует существование возрастающей относительно включения последовательности областей $D_n \in \mathcal{U}(D)$, $n \in \mathbb{N}$, такой, что $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Отсюда по Предложению 4.2 имеем $\mathcal{H}(\Omega_+) = \overline{\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+)}$ в силу произвола в выборе $D \Subset \Omega_+$. Это дает равенство $\overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}(\Omega_+) = \overline{\operatorname{conv}}\overline{\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+)}$. Последнее влечет за собой требуемое равенство, поскольку в топологическом векторном пространстве замкнутая выпуклая оболочка замыкания множества совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой этого множества [38, гл. II, § 1, п. 6]. •

Теорема 4. *Пусть* $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$, $K := \operatorname{supp}\mu$ *и* $K \cap K' = \varnothing$. *Тогда найдутся области* $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{U}$ *такие, что* $K' \subset \Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$, $K \subset \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0$ *и одновременно* $\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_1; \Omega_0)$, *где замыкание выпуклой оболочки — в* $C(\Omega_1)^*$.

Доказательство. Пусть Ω' — какая-либо предкомпактная подобласть в Ω, включающая в себя компакт K. По условию 1) Определения 1 найдется область $\Omega_1 \in \mathcal{U}$ такая, что $\Omega' \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ и каждая непустая ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (здесь пока в роли Ω_1, D и Ω_2 первого условия Определения 1 выступают соотв. Ω', Ω_1 и Ω). Тогда по второй части Предложения 4.1 имеем $\mu \in \mathcal{J}(\Omega_1)$. Аналогично, применяя условие 1) Определения 1, но уже к паре областей Ω' и Ω_1, вновь можем подобрать *вспомогательную область* Ω_+ так, что $\Omega' \Subset \Omega_+ \Subset \Omega_1$ и каждая непустая ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus \Omega_+$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$. Тогда по второй части Предложения 4.1 имеем уже $\mu \in \mathcal{J}(\Omega_+)$, а по Теореме C Коула–Рансфорда получаем $\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}(\Omega_+)$. Отсюда по Предложению 4.3 и построению областей $\Omega_+, \Omega_1 \in \mathcal{U}$ следует

$$\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+) \text{ в } C(\Omega_+)^*, \quad \text{где } K \subset \Omega' \Subset \Omega_+ \Subset \Omega_1 \Subset \Omega. \tag{4.3}$$

Это означает, что существует сеть (или, в иной терминологии, обобщенная последовательность) $\{\sigma_n\} \subset \operatorname{conv}\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+)$, где индексы n пробегают направленность (направленное множество) $\mathcal{N}$, сходящаяся к μ в $C(\Omega_+)^*$ по направленности $\mathcal{N}$. Конкретнее, каждому индексу n соответствует конечный по индексам $k \in \mathbb{N}$ набор чисел $c_{kn} > 0$ и регулярных областей $D_{kn} \in \mathcal{U}(\Omega_+)$ таких, что

$$\sigma_n = \sum_k c_{kn}\omega_{D_{kn}}, \quad \omega_{D_{kn}} := \omega_{D_{kn}}(0, \cdot), \quad \sum_k c_{kn} = 1. \tag{4.4}$$

Ввиду условия $K \bigcap K' = \varnothing$ и по условию 1) Определения 1 можно ввести в рассмотрение область $\Omega_0 \in \mathcal{U}$, а затем еще *две вспомогательные области* Ω_0' и Ω_-, для которых имеют место отношения

$$K' \subset \Omega_0 \Subset \Omega_0' \Subset \Omega_- \Subset \Omega', \qquad K \bigcap \overline{\Omega}_- = \varnothing. \tag{4.5}$$

Каждой области D_{kn} по условию 2) Определения 1, учитывая (4.5), можно сопоставить область $\Omega_{kn} \in \mathcal{U}$ такую, что $\Omega_0 \Subset \Omega_{kn} \Subset \Omega_0'$ и одновременно

$$D_{kn}' := \Omega_{kn} \cup D_{kn} \in \mathcal{U}, \qquad \Omega_0 \Subset D_{kn}', \qquad D_{kn}, D_{kn}' \Subset \Omega_+. \tag{4.6}$$

Для лучшего ориентирования в большом количестве возникших областей выпишем отдельно всю цепочку их включений из (4.3) и (4.5):

$$0 \in K' \subset \Omega_0 \Subset \Omega_{kn} \Subset \Omega_0' \Subset \Omega_- \Subset \Omega' \Subset \Omega_+ \Subset \Omega_1 \Subset \Omega, \quad K \subset \Omega' \setminus \overline{\Omega}_-. \tag{4.7}$$

Из этих включений, используя теорему Титца–Урысона о продолжении непрерывных функций, стандартно выводится, что сеть из сужений выпуклых комбинаций мер из (4.4) на $\Omega_0' \Subset \Omega_-$ сходится к нулевой мере в $C(\overline{\Omega}_+)^*$ по направленности $\mathcal{N}$, поскольку носитель $\operatorname{supp}\mu = K$ лежит вне Ω_-. Тем более этим свойством обладает сеть из соответствующих выпуклых комбинаций

$$\sigma_n^\circ := \sum_k c_{kn}\omega_{D_{kn}}^\circ \text{ из сужений } \omega_{D_{kn}}^\circ := \omega_{D_{kn}}\Big|_{\Omega_{kn}}, \tag{4.8}$$

так как $\Omega_{kn} \Subset \Omega'_0$ по (4.7). Теперь наша задача — преобразовать сеть $\{\sigma_n\}$ из (4.4), не меняя ее предела μ в $C(\Omega_+)^*$, так, чтобы слагаемые $\omega_{D_{kn}}$ в (4.4), ее определяющие, по-прежнему оставались гармоническими мерами, но уже относительно областей из $\mathcal{U}$, включающих в себя область Ω_0.

Для мер $\omega^\circ_{D_{kn}}$ из (4.8) и гармонических мер $\omega_{D_{kn}}$ из (4.4) рассмотрим их классические выметания соотв. $(\omega^\circ_{D_{kn}})^{D'_{kn}}$ и $(\omega_{D_{kn}})^{D'_{kn}}$ относительно D'_{kn} из (4.6). По Предложению 3.4 (в роли D, Ω' и $D\cup\Omega'$ в данном случае выступают соотв. D_{kn}, Ω_{kn} и D'_{kn} из (4.6)) каждая мера $(\omega_{D_{kn}})^{D'_{kn}}$ — это гармоническая мера $\omega_{D'_{kn}}(0,\cdot) =: \omega_{D'_{kn}}$ (см. второе равенство в (3.13)), после чего последнее равенство из (3.13) в обозначениях (4.8) записывается в виде

$$\omega_{D'_{kn}} = \omega_{D_{kn}} - \omega^\circ_{D_{kn}} + (\omega^\circ_{D_{kn}})^{D'_{kn}}.$$

Суммируя последнее равенство по k с коэффициентами c_{nk} из (4.4), при каждом $n \in \mathcal{N}$ с учетом (4.8) получаем

$$\sigma'_n := \sum_k c_{kn}\omega_{D'_{kn}} = \sigma_n - \sigma^\circ_n + \sum_k c_{kn}(\omega^\circ_{D_{kn}})^{D'_{kn}}. \tag{4.9}$$

Как уже отмечалось перед (4.8), сеть σ°_n сходится к нулевой мере в $C(\overline{\Omega}_+)^*$ по направленности $\mathcal{N}$. В частности, числовая сеть из полных мер $\sigma^\circ_n(\overline{\Omega}_+)$ сходится к нулю по $\mathcal{N}$. Но при классическом выметании каждой *положительной* меры ω°_{kn} ее полная мера равна полной мере выметания $(\omega^\circ_{D_{kn}})^{D'_{kn}}$. Следовательно, сеть из полных мер последних выпуклых комбинации в (4.9), состоящих из выметаний, также сходится к нулю по направленности $\mathcal{N}$, причем все носители этих выпуклых комбинаций ввиду (4.6) содержатся в Ω_+. Отсюда сеть из этих выпуклых комбинаций также сходится к нулевой мере в $C(\overline{\Omega}_+)^*$ по направленности $\mathcal{N}$. Таким образом, сети σ'_n и σ_n сходятся к одной и той же мере μ в $C(\overline{\Omega}_+)^*$ и, тем более, в $C(\Omega_1)^*$ ввиду (4.7). Остается отметить, что по построению согласно (4.6) и (4.7) каждая мера σ'_n принадлежит $\operatorname{conv}\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_1;\Omega_0)$. •

§ 4.2. Свойство (J) в условиях (h1) и (h2) Основной Теоремы

Напомним, что по условию Основной Теоремы K_0 — *связный компакт в области* Ω, *содержащий* 0, а $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ — *регулярная оптимально исчерпывающая система в* Ω с центром K_0. Будем также придерживаться обозначений (4.2).

По условию i) на функцию M можно подобрать область Ω' так, что $K_0 \subset \Omega'$ и функция M *ограничена в открытой окрестности связного компакта* $K' := \overline{\Omega'}$. При этом $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{K'}(\Omega) := \{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)\colon K' \subset D\}$ — регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром K', включенная в $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$.

В силу условия $u(0) \neq -\infty$ и ввиду конечности $M(0)$ по классической формуле Пуассона–Йенсена (3.6), примененной к функциям $u, M \in SH(\Omega)$, из неравенства (2.8) следует неравенство

$$\int_\Omega u(z)\,\mathrm{d}\omega_D(0,z) \leqslant \int_\Omega M(z)\,\mathrm{d}\omega_D(0,z) + C', \quad C' := u(0) - M(0) + C,$$

— такое же, как и (2.9), с разницей лишь в постоянной C' вместо C, но по-прежнему не зависящей от μ. Это значит, что из условия (h1) следует (h2). Таким образом, достаточно вывести (J) из (h2).

Пусть мера Йенсена μ принадлежит классу $\mathcal{J}^{K'}(\Omega)$, определенному после Предложения 3.2. Положим $K := \operatorname{supp}\mu$. Тогда $K \cap K' = \varnothing$ по определению класса $\mathcal{J}^{K'}(\Omega)$. Следовательно, применима Теорема 4, согласно которой найдутся области $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{U}$ такие, что $K' \subset \Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$, $K \subset \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0$ и $\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_1; \Omega_0)$ в $C(\Omega_1)^*$. Положим

$$d_0 := \operatorname{dist}(K', \partial\Omega_0), \quad d_1 := \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega) \tag{4.10}$$

и выберем число ε так, что

$$0 < \varepsilon < \min\{d_0, d_1\}. \tag{4.11}$$

Пусть $D \in \mathcal{U}(\Omega_1; \Omega_0)$. Согласно (4.10) и (4.11) для любого $w \in D(\varepsilon)$ ввиду условной инвариантности относительно сдвига системы $\mathcal{U}$ регулярная область $D_w = \{z - w \colon z \in D\}$ принадлежит классу $\mathcal{U}$. Следовательно, по условию (h2) и ввиду включения $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ для некоторой постоянной C, *не зависящей от* D, w *и* μ, справедливо неравенство

$$\int_\Omega u(z)\, \mathrm{d}\omega_{D_w}(0, z) \leqslant \int_\Omega M(z)\, \mathrm{d}\omega_{D_w}(0, z) + C.$$

Замена переменной $z - w$ на новую переменную здесь дает неравенство

$$\int_\Omega u(z+w)\, \mathrm{d}\omega_D(0, z) \leqslant \int_\Omega M(z+w)\, \mathrm{d}\omega_D(0, z) + C \tag{4.12}$$

для всех $D \in \mathcal{U}(\Omega_1; \Omega_0)$ и $w \in D(\varepsilon)$, где постоянная C не зависит от μ и ε из (4.11). Интегрируя обе части (4.12) по вероятностной мере $m^{(\varepsilon)}$ (см. (1.3)), по теореме Фубини о повторных интегралах получаем

$$\begin{aligned}\int_\Omega \bigl(u * m^{(\varepsilon)}\bigr)(z)\, \mathrm{d}\omega_D(0, z) &= \int_{D(\varepsilon)} \int_\Omega u(z+w)\, \mathrm{d}\omega_D(0, z)\, \mathrm{d}m^{(\varepsilon)}(w) \\ &\overset{(4.12)}{\leqslant} \int_{D(\varepsilon)} \int_\Omega M(z+w)\, \mathrm{d}\omega_D(0, z)\, \mathrm{d}m^{(\varepsilon)}(w) + \int_{D(\varepsilon)} C\, \mathrm{d}m^{(\varepsilon)}(w) \\ &= \int_\Omega \bigl(M * m^{(\varepsilon)}\bigr)(z)\, \mathrm{d}\omega_D(0, z) + C.\end{aligned}$$

Отсюда в обозначении (1.6) имеем

$$\int_\Omega u^{(\varepsilon)}(z)\, \mathrm{d}\omega_D(0, z) \leqslant \int_\Omega M^{(\varepsilon)}(z)\, \mathrm{d}\omega_D(0, z) + C, \quad \forall D \in \mathcal{U}(\Omega_1; \Omega_0), \tag{4.13}$$

где функции $u^{(\varepsilon)}$ и $M^{(\varepsilon)}$ определены и непрерывны на Ω_1. Выше перед (4.10) было отмечено, что $\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_1; \Omega_0)$ в $C(\Omega_1)^*$, и из (4.13) следует

$$\int_\Omega u^{(\varepsilon)}(z)\, \mathrm{d}\mu(z) \leqslant \int_\Omega M^{(\varepsilon)}(z)\, \mathrm{d}\mu(z) + C.$$

Отсюда, ввиду (1.4), имеем

$$\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega M^{(\varepsilon)}\,\mathrm{d}\mu + C.$$

Если здесь устремить ε к нулю, то убывающая сеть $\{M^{(\varepsilon)}\}$ непрерывных функций поточечно стремиться к M на Ω_1, поскольку $M \in SH(\Omega)$. Таким образом,

$$\int_\Omega u\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega M\,\mathrm{d}\mu + C. \tag{4.14}$$

Но мера $\mu \in \mathcal{J}^{K'}(\Omega)$, где $K' = \overline{\Omega'}$ — замыкание области Ω', выбиралась произвольно, а постоянная C не зависит от μ. Другими словами, неравенство (4.14) выполнено для каждой меры $\mu \in \mathcal{J}^{\overline{\Omega'}}(\Omega)$. По обощенной формуле Пуассона–Йенсена (3.5) из неравенства (4.14) следует неравенство

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} V_\mu\,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_\Omega M\,\mathrm{d}\mu + \bigl(C - u(0)\bigr) \tag{4.15}$$

для каждой меры $\mu \in \mathcal{J}^{\overline{\Omega'}}(\Omega)$, где V_μ — потенциал (3.4) меры μ и постоянная $C' := C - u(0)$ не зависит от μ. Но неравенство (4.15) — это в точности (4.1) с постоянной C' вместо C. Кроме того, верхний индекс в $\mathcal{J}^{\overline{\Omega'}}(\Omega)$ можно заменить на Ω', что следует из достаточного произвола в выборе $\Omega' \supset K_0$ в начале текущего параграфа. Тем самым свойство (J) доказано. $\bullet$

Замечание. Для вывода утверждения (J) нигде не используется представление функции M через субгармоническое ядро. Другими словами, условия ii) и iii) Основной Теоремы не требуются для доказательства (J).

5 Доказательство Основной Теоремы

Цель этого заключительного раздела — показать, что условие (J) из начала раздела 4 влечет за собой существование гармонической миноранты h для функции (2.11). После раздела 4 это дает как (2.10), так и заключение части II Основной Теоремы, что и завершит ее доказательство.

Итак, пусть условие (J) выполнено. По обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.5) и Предложению 3.3 из условия (J) следует, что

(J$'$) *для постоянной* $C' = C + M(0)$ *неравенство*

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} V\,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_{\Omega\setminus\{0\}} V\,\mathrm{d}\nu_M + C' \tag{5.1}$$

выполнено для каждой функции Йенсена $V \in \mathcal{P}_J^{\Omega'}(\Omega)$ (см. перед (3.9)).

Пусть теперь $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega'}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ — *мера Аренса–Зингера с потенциалом* V_μ (см. (3.4)). По Предложению 3.3 функция Аренса–Зингера V_μ принадлежит классу $\mathcal{P}_{AS}^{\Omega'}(\Omega)$. Кроме того, по Определению 4 функция $V_\mu^+(\zeta) := \max\{V(\zeta), 0\}$,

$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, — это *функция Йенсена*, принадлежащая классу $\mathcal{P}_J^{\Omega'}(\Omega)$. Следовательно, условие (J′) влечет за собой неравенства

$$\int_\Omega V_\mu \,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_\Omega V_\mu^+ \,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_\Omega V_\mu^+ \,\mathrm{d}\nu_M + C' \tag{5.2}$$

для всех мер Аренса–Зингера $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega'}(\Omega)$. Теперь потребуется оценка сверху последнего интеграла

$$I_\mu := \int_\Omega V_\mu^+ \,\mathrm{d}\nu_M \overset{\text{ii)}}{=} \int_B V_\mu^+ \,\mathrm{d}\nu_M. \tag{5.3}$$

Согласно представлению (3.7) Предложения 3.1 для потенциала V_μ имеем

$$\begin{aligned} I_\mu = \int_B \biggl(\int_\Omega \bigl(k(\zeta,z) - k(\zeta,0)\bigr)\,\mathrm{d}\mu(z)\biggr)^+ \,\mathrm{d}\nu_M(\zeta) \\ \leqslant \int_B \int_\Omega \bigl(k(\zeta,z) - k(\zeta,0)\bigr)^+ \,\mathrm{d}\mu(z)\,\mathrm{d}\nu_M(\zeta) \\ = \int_B \int_\Omega \Bigl(\bigl(k(\zeta,z) - k(\zeta,0)\bigr) + \bigl(k(\zeta,0) - k(\zeta,z)\bigr)^+\Bigr)\,\mathrm{d}\mu(z)\,\mathrm{d}\nu_M(\zeta). \end{aligned}$$

Отсюда, используя теорему Фубини о повторных интегралах, получаем

$$\begin{aligned} I_\mu \leqslant \int_\Omega \biggl(\int_B \bigl(k(\zeta,z) - k(\zeta,0)\bigr)\,\mathrm{d}\nu_M(\zeta) \\ + \int_B \bigl(k(\zeta,0) - k(\zeta,z)\bigr)^+ \,\mathrm{d}\nu_M(\zeta)\biggr)\,\mathrm{d}\mu(z) \\ \overset{(1.9)}{=} \int_\Omega \biggl(\int_B \bigl(k(\zeta,z) - k(\zeta,0)\bigr)\,\mathrm{d}\nu_M(\zeta) + Q_k^{\nu_M}(z)\biggr)\,\mathrm{d}\mu(z). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Согласно условию ii) и представлению (2.2) Предложения 2.1 функция M может быть представлена в виде

$$M(z) = \int_B k(\zeta,z)\,\mathrm{d}\nu_M(\zeta) + H(z) = U_k^{\nu_M}(z) + H(z), \quad z \in \Omega,$$

где $H \in \operatorname{Har}(\Omega)$. Отсюда следует равенство

$$\bigl(M(z) - M(0)\bigr) - \bigl(H(z) - H(0)\bigr) = \int_B \bigl(k(\zeta,z) - k(\zeta,0)\bigr)\,\mathrm{d}\nu_M(\zeta). \tag{5.5}$$

Подставляя левую часть (5.5) в (5.4), получаем

$$I_\mu \overset{\text{iii)}}{\leqslant} \int_\Omega \Bigl(\bigl(M(z) - M(0)\bigr) - \bigl(H(z) - H(0)\bigr) + Q(z)\Bigr)\,\mathrm{d}\mu(z). \tag{5.6}$$

По Определению 3 мер Аренса–Зингера с учетом (3.3) правая часть (5.6) равна

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Bigl(\bigl(M(z) + Q(z)\bigr) - H(z)\Bigr)\,\mathrm{d}\mu(z) - M(0) + H(0) \\ \overset{(3.2)}{=} \int_\Omega \bigl(M(z) + Q(z)\bigr)\,\mathrm{d}\mu(z) - M(0), \end{aligned}$$

так как $H \in \mathrm{Har}(\Omega)$. Теперь, если вспомнить (5.2), (5.3) и (5.6), получаем

$$\int_\Omega V_\mu \,\mathrm{d}\nu_u \leqslant \int_\Omega \bigl(M(z)+Q(z)\bigr)\,\mathrm{d}\mu(z) + (C' - M(0)),$$

где постоянная $C'' := C' - M(0)$ не зависит от $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega'}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega)$. Это означает выполнение второго неравенства в (3.21) *для каждой меры Аренса–Зингера* $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega'}(\Omega) \bigcap \mathcal{M}^+_{\mathrm{ac}}(\Omega)$ с функцией $M + Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ вместо M и постоянной C'' в роли C. Таким образом, по Теореме 3 для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничению (1.5), найдется функция $h \in \mathrm{Har}(\Omega)$, с которой

$$u(z) + h(z) \leqslant (M+Q)^{(\sigma)}(z) = \bigl(M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)}\bigr)(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Другими словами, функция h — гармоническая миноранта для функции (2.11).

Это завершает доказательство Основной Теоремы.

Список литературы.

[1] *Khabibullin B. N.* Zero (sub)sets for spaces of holomorphic functions and (sub)harmonic minorants // Electronic Archive at LANL, 18 Dec 2004, 42 pages, http://arxiv.org/abs/math.CV/0412359.

[2] *Khabibullin B. N.* Zero (sub)sets for weighted spaces of holomorphic functions // Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященной столетию С. М. Никольского. Тезисы докладов. Москва. 2005 (23–29 мая). С. 307.

[3] *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.

[4] *Ransford T. J.* Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[5] *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic Function Theory. New York etc.: Springer-Verlag, 1992.

[6] *Khabibullin B. N.* Dual approach to certain questions for the weighted spaces of holomorphic functions // Israel Math. Conference Proceedings (“Entire Functions in Modern Analysis”, Tel-Aviv, 1997). 2001. V. 15. P. 207–219.

[7] *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Серия матем. 2001. Т. 65. № 4. С. 835–852.

[8] *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Серия матем. 2001. Т. 65. № 5. С. 167–190.

[9] *Kondratyuk A. A., Vasyl'kiv Ya. V.* Growth Majorants and Quotient Representations of Meromorphic Functions // Computational Metods and Function Theory. 2001. V. 1. No. 2, P. 595–606.

[10] *Khabibullin B. N.* The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results // Математическая физика, анализ, геометрия. 2002. Т. 9. № 2. С. 146-167.

[11] *Klimek M.* Pluripotential Theory. Oxford: Clarendon Press, 1991.

[12] *Джрбашян М. М.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге // Докл. АН Арм. ССР. 1945. Т. 3. № 1. С. 3–9.

[13] *Джрбашян М. М.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге // Матем. сб. 1969. Т. 79(121). № 4(8). С. 517–615.

[14] *Джрбашян М. М.* Теория факторизации и граничных свойств функций, мероморфных в круге // УМН. 1973. Т. 28. Вып. 4(172). С. 3–14.

[15] *Нафталевич А. Г.* Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. №. 2. С. 205–208.

[16] *Нафталевич А. Г.* Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге // Лит. мат. сб. 1961. Т. 1. №. 1–2. С. 159–180.

[17] *Tsuji M.* Canonical product for a meromorphic function in a unit circle // J. Math. Soc. Jap. 1956. V. 8. No. 1. P. 7–21.

[18] *Tsuji M.* Potential theory in modern function theory. Tokyo: Maruzen Co., 1959.

[19] *Colwell P.* Blaschke Product. Bounded Analytic Functions. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1985.

[20] *Horowitz C.* Zeros of functions in the Bergman spaces // Duke Math. 1974. V. 41. P. 693–710.

[21] *Beller E.* Factorization for non-Nevanlinna classes of analytic functions // Israel J. Math. 1977. V. 27. No. 3–4. P. 320–330.

[22] *Bomash G.* A Blashke-type product and random zero sets for Bergman spaces // Arkiv für Math. 1992. V. 30. P. 45–60.

[23] *Beller E., Horowitz C.* Zero sets and random zero sets in certain function spaces // J. Analyse Math. 1994. V. 64. P. 203–217.

[24] *Korenblum B.* An extension of the Nevanlinna theory // Acta Math. 1975. V. 135. P. 187–219.

[25] *Шамоян Ф. А.* О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1983. Т. XVIII. № 1. С. 15–27.

[26] *Джрбашян М. М.* Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1970. Т. 5. №. 6. С. 453–485.

[27] *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1991. Т. 85. С. 5–185.

[28] *Gamelin T. W.* Uniform Algebras and Jensen Measures. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.

[29] *Ransford T. J.* Jensen measures // Approximation, Complex Analysis and Potential Theory (Montreál, Qc, 2000). NATO Sci. Sér. II. Math-Phys-Chem 37. Dordrecht: Kluwer, 2001. P. 221–237.

[30] *Cole B. J., Ransford T. J.* Jensen measures and harmonic measures // J. reine und angew. Math. 2001. V. 541. P. 29–53.

[31] *Koosis P.* Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Montréal: Les Publications CRM, 1996.

[32] *Cole B. J., Ransford T. J.* Subharmonicity without Upper Semicontinuity // J. Funct. Anal. 1997. V. 147. P. 420–442.

[33] *Sundberg C.* Measures induced by analytic functions and a problem of Walter Rudin // J. Amer. Math. Soc. 2002. V. 16. No. 1. P. 69–90.

[34] *Хабибуллин Б. Н.* Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций // Сиб. матем. ж. 2003. Т. 4. № 4. С. 905-925.

[35] *Шварц Л.* Анализ. Т. I. М.: Мир, 1972.

[36] *Kuran Ü.* On measures associated to superharmonic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 36. No. 1. P. 179–186.

[37] *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

[38] *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.

E-mail: *khabib-bulat@mail.ru*
Web-site: *www.bashedu.ru/khabib-bulat*
Уфа, Башкирский государственный унивеситет
Уфа, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН